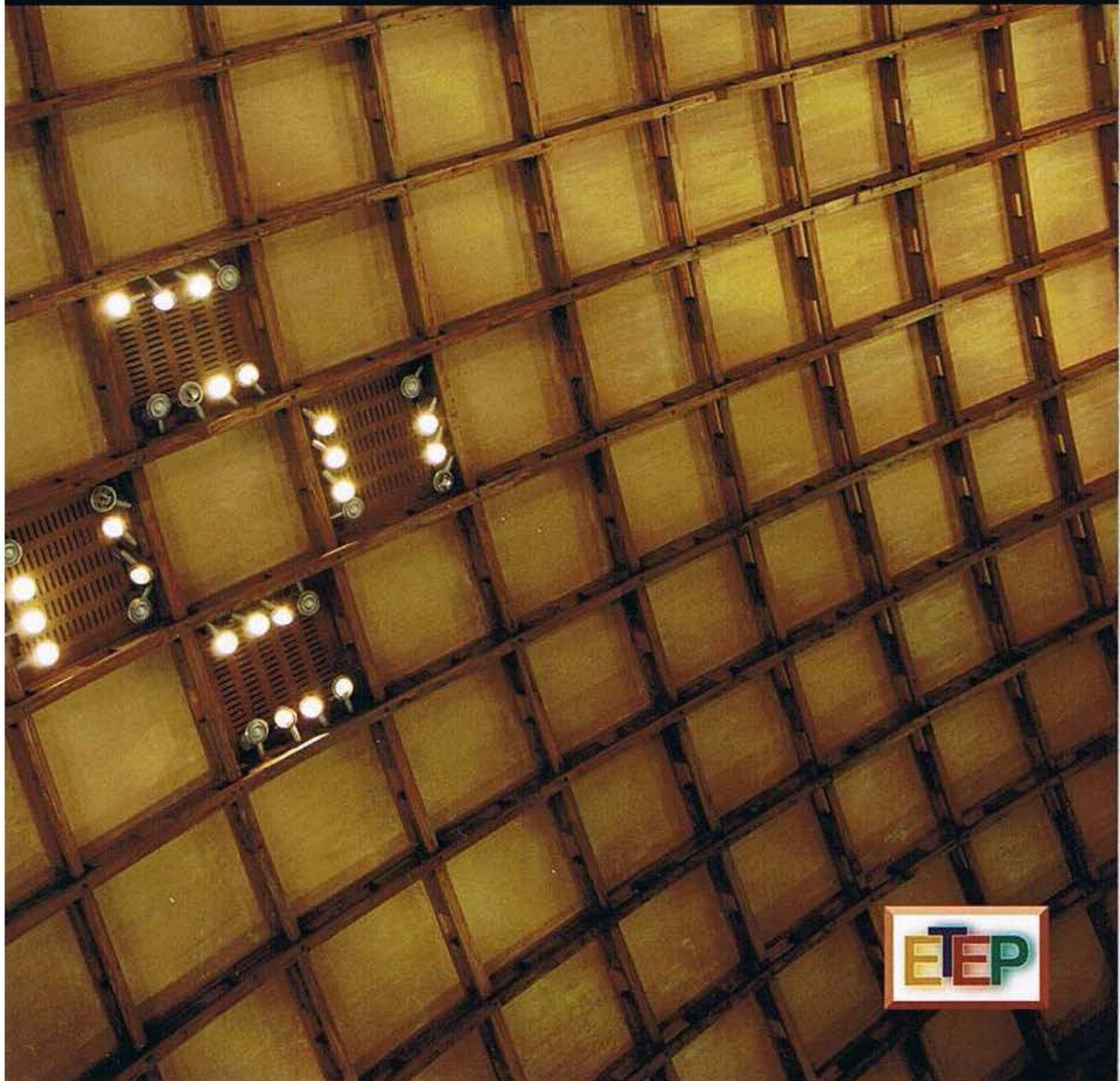


F. Teixeira-Dias
J. Pinho-da-Cruz
R.A. Fontes Valente
R.J. Alves de Sousa

Método dos Elementos Finitos

Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia



VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

F Teixeira-Dias
J. Pinho-da-Cruz
R.A. Fontes Valente
R.J. Alves de Sousa

Método dos Elementos Finitos

Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia



CreativeTech



EDIÇÕES
TÉCNICAS E PROFISSIONAIS

DA MESMA EDITORA

-AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL – 3.ª ed.

J. Norberto Pires

-AUTÓMATOS PROGRAMÁVEIS – 4.ª ed.

António Francisco

-CURSO DE AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

Paulo Oliveira

-CURSO DE ELECTRÓNICA INDUSTRIAL (EP)

Fernando Velez / Paulo Oliveira / Luís Borges / Ana Rodrigues

-MECÂNICA DOS FLUIDOS – 2.ª ed.

Luís Adriano Oliveira / António Gameiro Lopes

-MOTORES ELÉCTRICOS – 2.ª ed.

António Francisco

-SISTEMAS ELECTRÓNICOS COM MICROCONTROLADORES – 2.ª ed.

Victor Gonçalves

DISTRIBUIÇÃO



Lidel – edições técnicas, lda.

SEDE: Rua D. Estefânia, 183, r/c Dto. – 1049-057 Lisboa
Internet: 21 354 14 18 – livrarialx@lidel.pt
Revenda: 21 351 14 43 – revenda@lidel.pt
Formação/Marketing: 21 351 14 48 – formacao@lidel.pt / marketing@lidel.pt
Ensino Línguas/Exportação: 21 351 14 42 – depinternacional@lidel.pt
Fax: 21 357 78 27 - 21 352 26 84
Linha de Autores: 21 317 32 53 – editec@lidel.pt
Fax: 21 317 32 59

LIVRARIAS:

LISBOA: Av. Praia da Vitória, 14 – 1000-247 Lisboa – livrarialx@lidel.pt
Telef. 21 354 14 18 – Fax 21 317 32 59

PORTO: Rua Damião de Góis, 452 – 4050-224 Porto – delporto@lidel.pt
Telef. 22 557 35 10 – Fax 22 550 11 19



© Marca registada de LIVRIMPOR – Livros Técnicos, Lda.
Rua D. Estefânia, 183 – 1.º Esq. – 1000-154 Lisboa
Telef. 21 317 32 53 – Fax 21 317 32 59

Copyright © Fevereiro 2010

ETEP – EDIÇÕES TÉCNICAS E PROFISSIONAIS – Marca Registada de LIVRIMPOR

Impressão e acabamento: Rolo & Filhos II, S.A. – Indústrias Gráficas (Mafra)

ISBN: 978-972-8480-25-7

Depósito Legal: 304180/09

Capa: José Manuel dos Reis

Imagem: © Filipe Teixeira-Dias, 2007



Este pictograma merece uma explicação. O seu propósito é alertar o leitor para a ameaça que representa para o futuro da escrita, nomeadamente na área da edição técnica e universitária, o desenvolvimento massivo da fotocópia.

O Código do Direito de Autor estabelece que é crime punido por lei, a fotocópia sem autorização dos proprietários do *copyright*. No entanto, esta prática generalizou-se sobretudo no ensino superior, provocando uma queda substancial na compra de livros técnicos. Assim, num país em que a literatura técnica é tão escassa, os autores não sentem motivação para criar obras inéditas e fazê-las publicar, ficando os leitores impossibilitados de ter bibliografia em português.

Lembramos portanto, que é expressamente proibida a reprodução, no todo ou em parte, da presente obra sem autorização da editora.

*À Margarida
À Maria e à Leonor
Aos meus Pais*

~ Filipe

*Aos meus pais, Graça e Pinho
Aos meus irmãos, Nuno e Jorge
À Manuela*

~ Alexandre

*Aos meus Pais e Irmão, por estarem sempre presentes
À Sonia, pelo carinho, dedicação e apoio ao longo desta caminhada*

~ Robertt

*À Susana e à Íris,
pela alegria e pelo sentido que diariamente dão à minha vida
Aos meus pais, por tantas coisas*

~ Ricardo

Os Autores

Filipe Teixeira-Dias (ftd@ua.pt) obteve os graus de Licenciatura (1992), Mestrado (1995) e Doutoramento (2000) em Engenharia Mecânica na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, e a Agregação (2009) na Universidade de Aveiro. Actualmente, é docente da Universidade de Aveiro, leccionando aulas das disciplinas de Introdução à Engenharia Mecânica e Mecânica Computacional, das quais é regente, e ainda de Mecânica das Estruturas. A sua actividade de investigação centra-se na mecânica computacional, na dinâmica de estruturas e de impacto, nos materiais celulares e no desenvolvimento de materiais e sistemas de protecção.

J. Alexandre M. Pinho da Cruz (jpc@ua.pt) é docente e investigador no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro, nas áreas da Mecânica Computacional, da Mecânica das Estruturas e do Cálculo Computacional Paralelo. Obteve a Licenciatura (1997) e o Mestrado (2001) em Engenharia Mecânica na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, e o Doutoramento (2007) também em Engenharia Mecânica na Universidade de Aveiro.

Robertt A. F. Valente (robertt@ua.pt) obteve os graus de Licenciatura (1997), Mestrado (1999) e Doutoramento em Engenharia Mecânica (2004) pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Desde 2001 é docente e investigador no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro, onde actualmente coordena as disciplinas de Mecânica dos Sólidos e Placas e Cascas, e colabora nas disciplinas de Mecânica das Estruturas e Simulação de Processos Tecnológicos. Desde 1997, a sua actividade de investigação centra-se no Método dos Elementos Finitos e no desenvolvimento de software de simulação numérica para aplicações estruturais nas indústrias aeronáutica e de conformação plástica.

Ricardo Alves de Sousa (rsousa@ua.pt) doutorou-se em Engenharia Mecânica (2006) pela Universidade de Aveiro. A sua área de investigação principal é a Mecânica Computacional, com ênfase na utilização do Método dos Elementos Finitos em aplicações de carácter estrutural e na simulação de processos de conformação de chapa. Actualmente, no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro, coordena a disciplina de Simulação de Processos Tecnológicos e lecciona as disciplinas de Mecânica dos Sólidos e Mecânica Aplicada.

Prefácio

O desafio de escrever o presente livro surgiu da paixão dos Autores pelas áreas da mecânica computacional e da simulação numérica, e das suas múltiplas implicações na generalidade dos fenómenos físicos do dia-a-dia. Adicionalmente, esta obra pretende colmatar uma lacuna que é a inexistência, em português europeu, de um livro que aborde — de forma concisa, mas ao mesmo tempo rigorosa — os fundamentos associados ao Método dos Elementos Finitos (MEF), uma das técnicas mais poderosas e versáteis de simulação computacional.

Esta obra tem por objectivo abranger os tópicos fundamentais mais relevantes para a compreensão do método dos elementos finitos, de uma forma acessível à generalidade dos estudantes de cursos superiores quer de engenharia quer de ciências. Em simultâneo, procurou-se apresentar estes conceitos através de uma abordagem prática que possa ser útil ao profissional de engenharia e de projecto que venha a ser confrontado com a necessidade da utilização ou do domínio de programas comerciais de simulação numérica baseados no MEF. Assim, a presente obra pretende despertar a curiosidade e o interesse dos leitores, alunos, professores ou profissionais da indústria pelo MEF e por todas as técnicas associadas de simulação numérica em engenharia.

Não obstante, e no sentido de atingir uma abrangência muito para além dos fundamentos da técnica, são também consideradas neste livro introduções a tópicos mais avançados, cuja leitura pode assim representar uma primeira abordagem por parte de leitores que desejem aprofundar os seus conhecimentos para além de um nível estritamente básico.

Procurou-se, tanto quanto possível, que os diversos capítulos deste livro fossem modulares em termos dos conceitos apresentados e, assim, que contivessem de forma independente toda a informação necessária à sua compreensão. Como

resultado, o livro poderá ser explorado e desfrutado de maneira sequencial do princípio ao fim, ou, em alternativa, através da consulta pontual dos diversos assuntos e temas expostos.

São apresentados vários exercícios resolvidos, de forma detalhada, que visam ilustrar a aplicação dos respectivos conceitos teóricos e teórico-práticos. Na sua globalidade, estes exercícios resolvidos, bem como os exercícios propostos, tentam reproduzir um percurso de aprendizagem com um grau de dificuldade crescente, permitindo uma compreensão gradual e sustentada da generalidade dos tópicos abordados. Cada capítulo contém uma lista extensiva de referências adicionais para os leitores interessados.

O público-alvo desta obra consiste em alunos e professores de cursos universitários e politécnicos, profissionais da indústria ligados às técnicas de simulação computacional, bem como profissionais com pouca ou nenhuma experiência na área da mecânica computacional, que pretendam um manual completo e de fácil leitura acerca do método dos elementos finitos.

Os Autores desta obra têm vindo a desenvolver trabalho há mais de uma década na área da investigação e do ensino de técnicas de simulação numérica em engenharia, tendo contribuído, na sua totalidade, com mais de uma centena de publicações em revistas internacionais e conferências científicas. Na eventualidade desta obra contribuir de forma humilde, mas positiva, para o estado-da-arte científico e para o ensino em engenharia, então o seu objectivo estará sobejamente cumprido.

Aveiro, 2009

Filipe Teixeira-Dias
J. Alexandre M. de Pinho da Cruz
Robertt A. Fontes Valente
Ricardo Alves de Sousa

Agradecimentos

Esta obra só se tornou uma realidade graças, em primeiro lugar, ao interesse e à confiança que, desde o primeiro momento, a editora LIDEL depositou nos Autores. O desafio lançado pela editora de elaborar uma obra de referência na área da simulação numérica — e em particular do Método dos Elementos Finitos — foi o factor decisivo e que muito honrou os Autores. Os Autores agradecem à editora LIDEL, na pessoa do Sr. Eng.º Frederico Annes, pela confiança neles depositada.

Tratando-se do culminar de uma experiência rica em termos quer científicos quer pedagógicos, os Autores expressam o seu agradecimento a todos os seus professores e alunos que constituíram fonte de inspiração e motivação para o estudo dos elementos finitos.

Os Autores agradecem ainda a todos os colegas, colaboradores e investigadores do grupo de investigação GRIDS, pelo espírito de equipa sempre manifestado. Em particular, os seus agradecimentos à Mariana Paulino, à Marisa Pinho Henriques, ao João Alexandre Oliveira, ao Victor Miranda, à Maria Ana Grilo, ao Daniel Gonçalves, ao Rodrigo Coelho, ao Daniel Afonso, ao Eduardo Santos, ao Mauro Simões e ao Miguel Mieiro por terem colaborado com a realização de algumas das simulações numéricas e alguns dos resultados que os Autores apresentam nos capítulos iniciais desta obra.

A todos, os Autores expressam o seu Muito Obrigado!

Índice Geral

Anexo a cores	xvii
---------------------	------

Parte I Introdução e Noções Fundamentais

1 Enquadramento	3
1.1 A origem do método dos elementos finitos	3
1.2 Guia de leitura	7
Referências Bibliográficas	11
2 Introdução à simulação numérica	15
2.1 Introdução	15
2.2 Simulação numérica	16
2.3 Método dos elementos finitos: O que é?	22
2.4 O ponto de vista do utilizador	27
2.4.1 Pré-processamento	31
2.4.2 Análise	32
2.4.3 Pós-processamento	32
2.5 O ponto de vista do programador	33
Referências Bibliográficas	35
3 Vectores e tensores: Conceitos básicos e notação	37
3.1 Introdução	37
3.2 Fundamentos de álgebra vectorial	40
3.3 Fundamentos de álgebra tensorial	48
3.4 Notação de Voigt	53
Referências Bibliográficas	56

4	Abordagem de engenharia	57
4.1	Introdução	57
4.2	Abordagem de engenharia	58
4.2.1	Generalização e definição do modelo	58
4.2.2	Discretização do modelo	58
4.2.3	Equações de equilíbrio	61
4.2.4	<i>Assemblagem</i>	63
4.2.5	Condições de fronteira e carregamentos	68
	Referências Bibliográficas	74

Parte II Análise de Sistemas Discretos

5	Análise matricial de sistemas discretos	77
5.1	Introdução	77
5.2	Sistemas discretos	78
5.2.1	Análise matricial de estruturas articuladas	79
5.2.2	Estruturas articuladas planas	87
5.2.3	Analogias com outros sistemas discretos	94
5.2.4	Estruturas reticuladas planas	100
	Referências Bibliográficas	111

Parte III Análise de Meios Contínuos

6	Generalização do método dos elementos finitos	115
6.1	Introdução	115
6.2	Problemas unidimensionais	118
6.2.1	Da formulação forte à formulação fraca	120
6.2.2	Continuidade	123
6.2.3	Generalização das condições de fronteira	125
6.2.4	Discretização em elementos finitos	128
6.3	Problemas bidimensionais	135
6.3.1	Discretização em elementos finitos	140
6.3.2	Extensão ao caso tridimensional	142
6.4	Elasticidade linear	144
	Problemas Propostos	152
	Referências Bibliográficas	156

7 Elementos finitos unidimensionais	157
7.1 Introdução	157
7.2 Princípio dos trabalhos virtuais (PTV)	158
7.3 Princípio da energia potencial mínima	161
7.4 Barra sujeita a carregamentos axiais	161
7.4.1 Elemento do tipo barra unidimensional	164
7.5 Discretização em múltiplos elementos lineares	170
7.6 Formulação matricial	179
7.6.1 Princípio dos trabalhos virtuais (PTV)	180
7.7 Elementos unidimensionais de grau superior	183
7.8 Integração numérica	186
Referências Bibliográficas	189
8 Elementos finitos bidimensionais e axissimétricos	191
8.1 Introdução	191
8.2 Relações entre tensão e deformação	193
8.3 Estados planos de deformação e de tensão	194
8.4 Introdução aos elementos finitos bidimensionais	199
8.4.1 Elementos finitos triangulares	199
8.4.2 Funções de forma: Condições	203
8.4.3 Campo de deformações e de tensões elementares	208
8.4.4 Coordenadas de área	211
8.4.5 Elementos triangulares de ordem superior	212
8.4.6 Elementos finitos retangulares	219
8.5 Elementos isoparamétricos quadriláteros bidimensionais	223
8.5.1 Funções de forma para elementos lagrangianos	224
8.6 Integração analítica das matrizes elementares	234
8.7 Integração numérica em duas dimensões	238
8.8 Escolha da ordem de integração a utilizar	243
8.9 Determinação da rigidez e das forças nodais equivalentes em elementos bidimensionais	245
8.10 Elementos finitos axissimétricos	249
8.10.1 Campos de deslocamentos e de deformações	251
8.10.2 Campo de tensões	253
8.10.3 Matriz de rigidez e vector de forças	254
8.10.4 Elementos axissimétricos isoparamétricos	256
Problemas Propostos	257
Referências Bibliográficas	261

9 Elementos finitos tridimensionais	263
9.1 Introdução	263
9.2 Campo de deslocamentos	267
9.2.1 Elementos finitos hexaédricos	267
9.2.2 Elementos finitos tetraédricos	277
9.3 Campo de deformações	281
9.4 Campo de tensões	282
9.5 Vector de forças e matriz de rigidez	284
9.6 Integração Numérica	292
9.6.1 Elementos finitos hexaédricos	292
9.6.2 Elementos finitos tetraédricos	293
Problemas Propostos	299
Referências Bibliográficas	300

Parte IV Tópicos Complementares e Avançados

10 Elementos dos tipos placa e casca degenerados	305
10.1 Introdução	305
10.2 Sistemas de coordenadas	307
10.2.1 Sistema de coordenadas global	307
10.2.2 Sistema de coordenadas curvilíneo natural	309
10.2.3 Sistema de coordenadas local	310
10.2.4 Sistema de coordenadas local nodal	313
10.3 Cinemática dos elementos finitos	316
10.3.1 Geometria e campo de deslocamentos	316
10.3.2 Campo de deformações	317
10.4 Método das deformações naturais assumidas	325
10.4.1 Enquadramento	325
10.4.2 Formulação de base	327
10.4.3 Elemento finito do tipo casca linear	331
10.4.4 Elemento finito do tipo casca quadrático	332
10.5 Leis constitutivas e matriz de rigidez	337
Problemas Propostos	338
Referências Bibliográficas	343
11 Método das diferenças finitas	345
11.1 Introdução	345
11.2 Diferenças finitas a uma dimensão	346
11.3 Método das diferenças finitas a duas dimensões	354

11.3.1	Análise térmica	357
11.3.2	Análise estrutural	360
	Problemas Propostos	369
	Referências Bibliográficas	371
12	Introdução à análise não-linear	373
12.1	Enquadramento	373
12.2	Introdução	374
12.3	Análise não-linear: Por que razão?	375
12.4	Análises não-lineares e não-linearidades	376
12.4.1	Tipos de não-linearidade	376
12.4.2	Não-linearidade material	377
12.4.3	Não-linearidade geométrica	379
12.4.4	Não-linearidade nas condições de fronteira	382
12.4.5	Tipos de análise não-linear	384
12.5	Particularidades das não-linearidades	388
12.5.1	Não-linearidade material estática/quase-estática: Elastoplasticidade	388
12.5.2	O modelo da elastoplasticidade infinitesimal	393
12.5.3	Não-linearidade material dinâmica	400
12.5.4	Não-linearidade geométrica	401
12.5.5	Não-linearidades nas condições de fronteira	402
12.6	Modelação de análises não-lineares	403
12.6.1	Aspectos gerais da análise não-linear: Procedimentos incrementais e iterativos	403
12.6.2	Aspectos particulares e procedimentos da análise não-linear	404
12.7	Exemplos de modelação não-linear	408
12.7.1	Análise quase-estática: Elastoplasticidade infinitesimal	408
12.7.2	Análise dinâmica: Condução transitória de calor	430
	Referências Bibliográficas	446
	Índice Remissivo	449

Anexo a cores



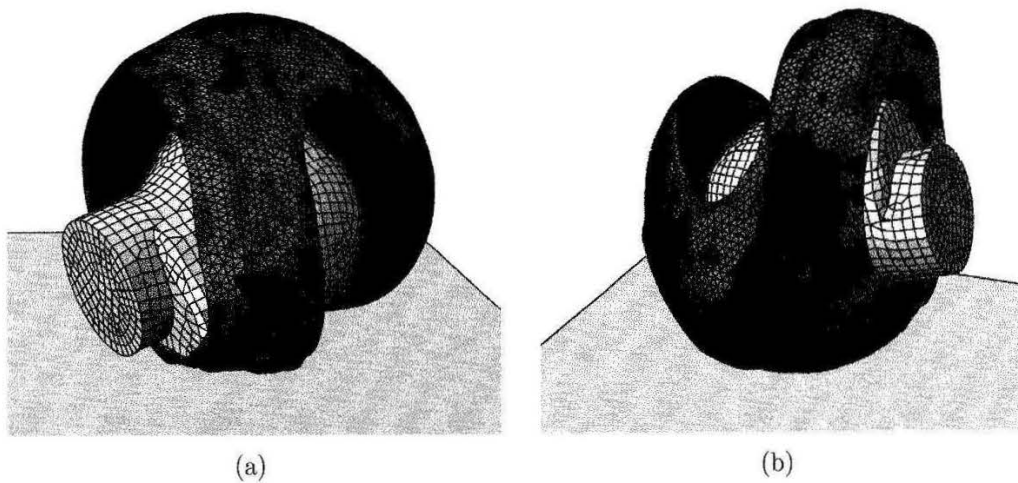


Figura 2.1 Modelação numérica e análise do impacto (a) frontal e (b) posterior de um capacete rodoviário contra um obstáculo rígido.

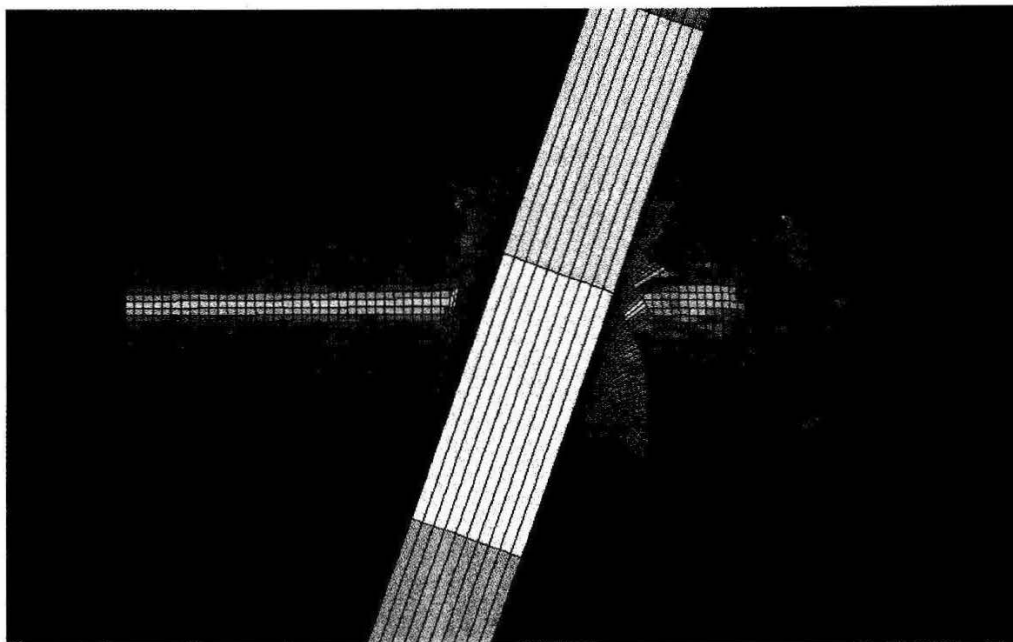


Figura 2.2 Modelação numérica do impacto balístico de um projectil contra um alvo metálico, com perfuração completa.

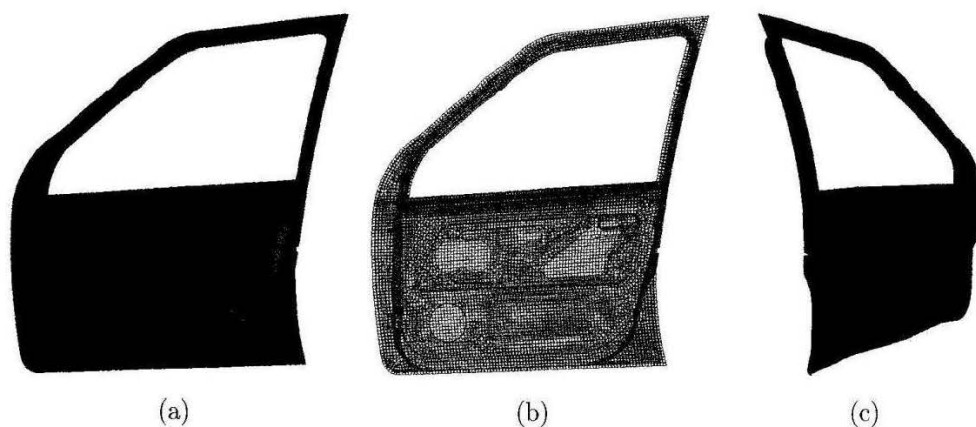


Figura 2.3 Modelo numérico de uma porta de automóvel utilizado no estudo da capacidade de absorção de energia num impacto lateral: (a) modelo geométrico tridimensional, (b) malha de elementos finitos e (c) porta deformada após o impacto.

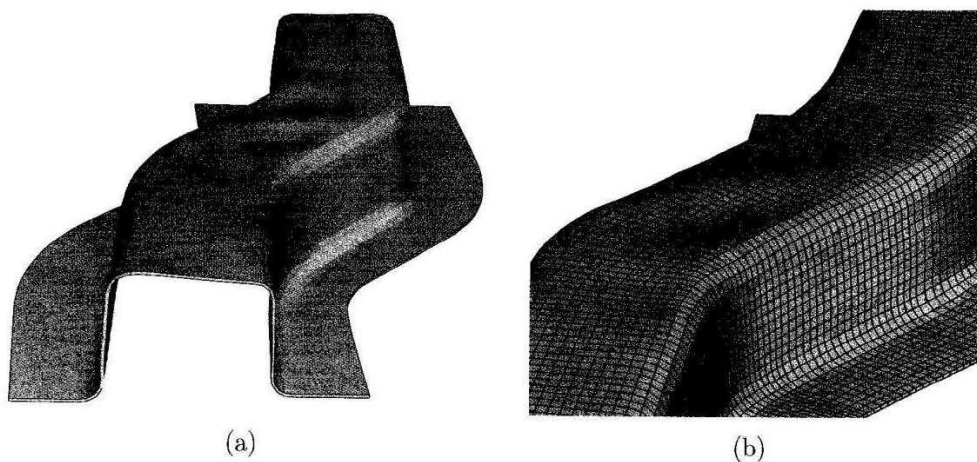


Figura 2.4 Resultado da simulação numérica da conformação plástica por embutidura de um componente metálico para a indústria automóvel: (a) vista geral do componente e (b) pormenor da malha de elementos finitos deformada.

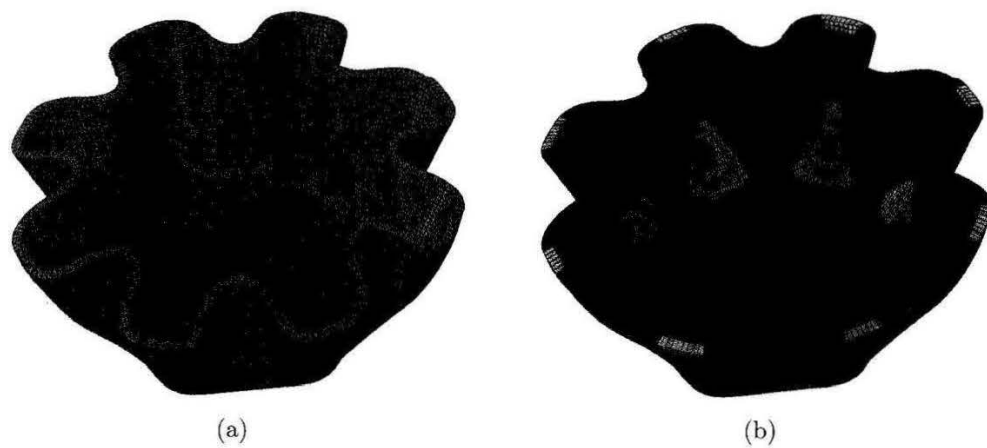


Figura 2.5 Resultado da simulação numérica da conformação plástica por embutidura de um copo cônico: (a) malha de elementos finitos do componente final e (b) representação dos isovalores de deformação plástica equivalente.

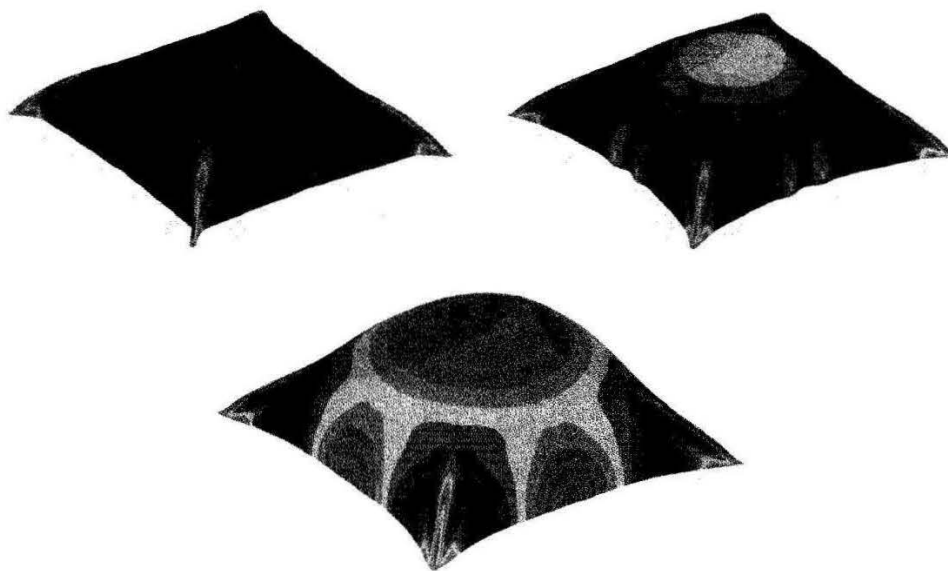
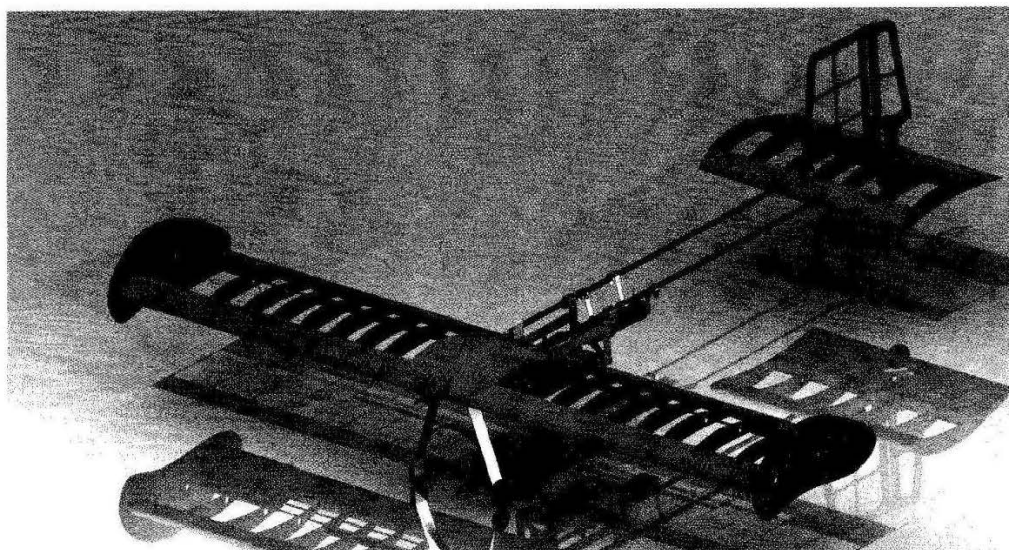
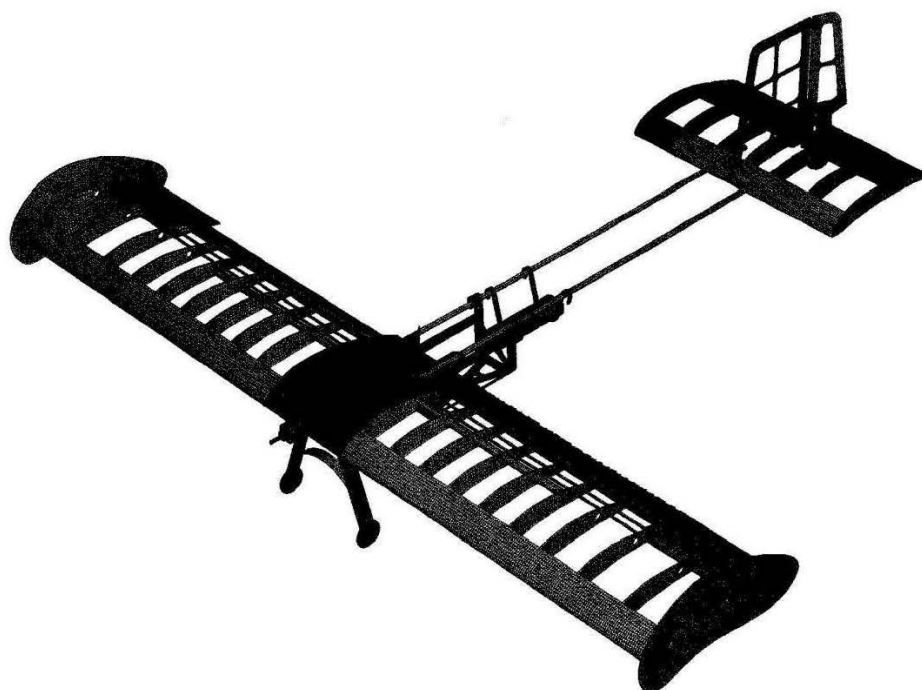


Figura 2.6 Simulação numérica pelo método dos elementos finitos da deformação de uma placa sob acção de uma pressão externa.



(a)



(b)

Figura 2.7 Projecto de um avião para aeromodelismo: (a) modelo geométrico completo em vista realista e (b) malha de elementos finitos global.

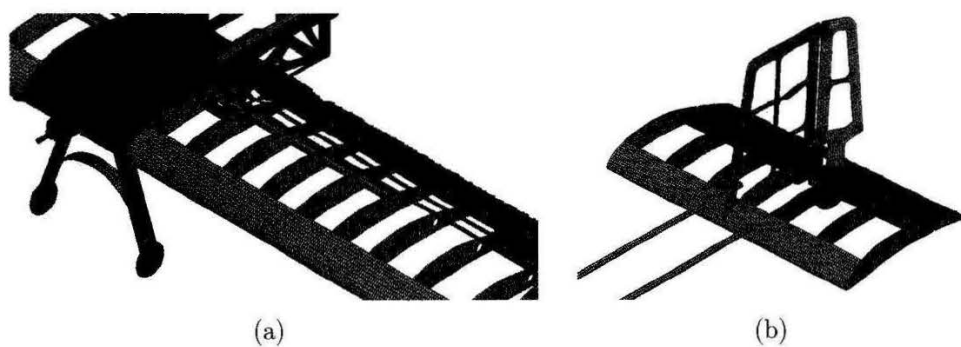


Figura 2.8 Projecto de um avião para aeromodelismo: vista pormenorizada da malha de elementos finitos na zona (a) de fixação da asa e (b) do leme do avião.

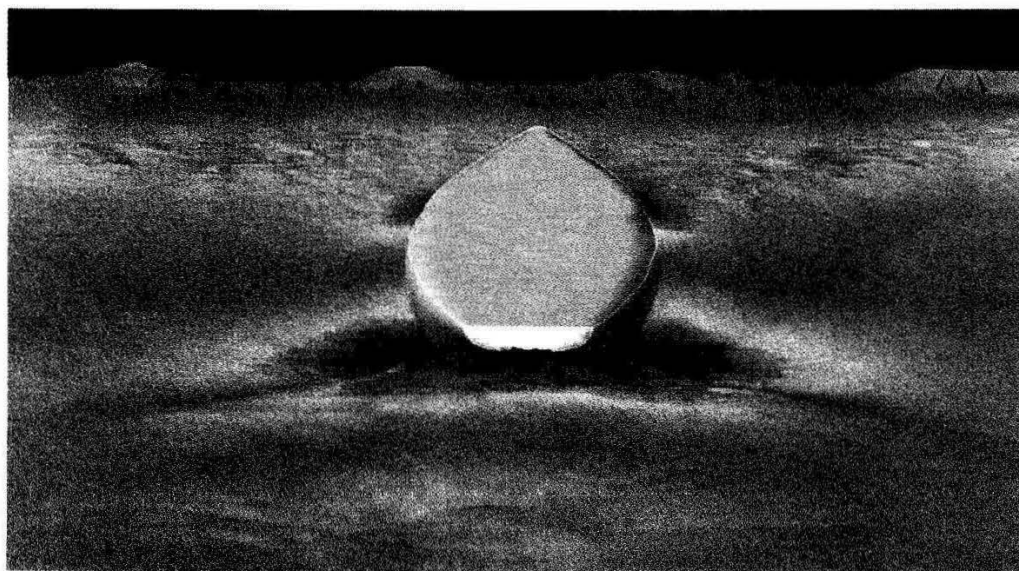


Figura 2.9 Modelação numérica do comportamento hidrodinâmico do casco do veleiro Endeavour, da Royal Yacht Squadron (Reino Unido), que concorreu à America's Cup em 1934.

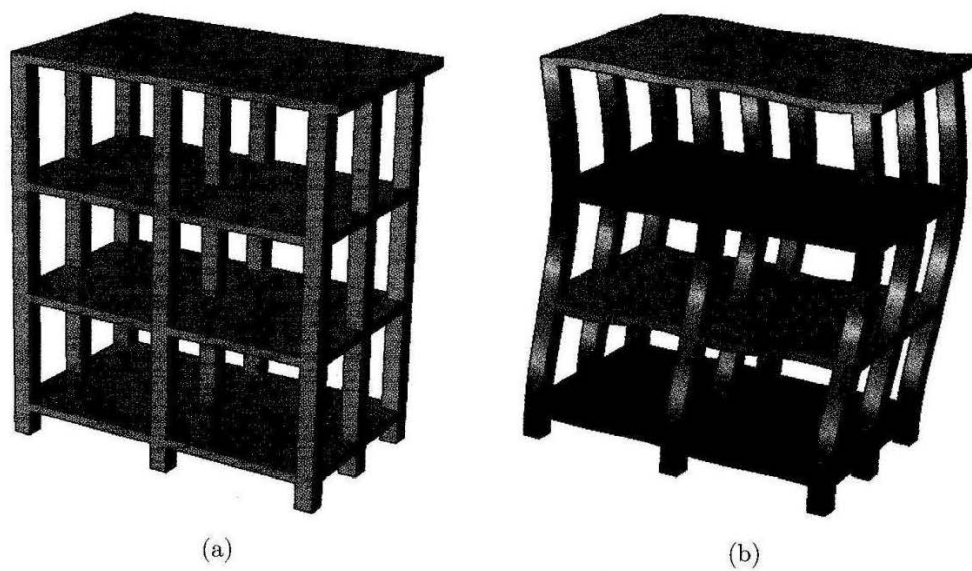


Figura 2.14 Exemplo de modelação de um edifício de betão armado sujeito a uma solicitação sísmica: (a) modelo geométrico da estrutura do edifício e (b) isovalores de deslocamento lateral da estrutura (deformada) do edifício.

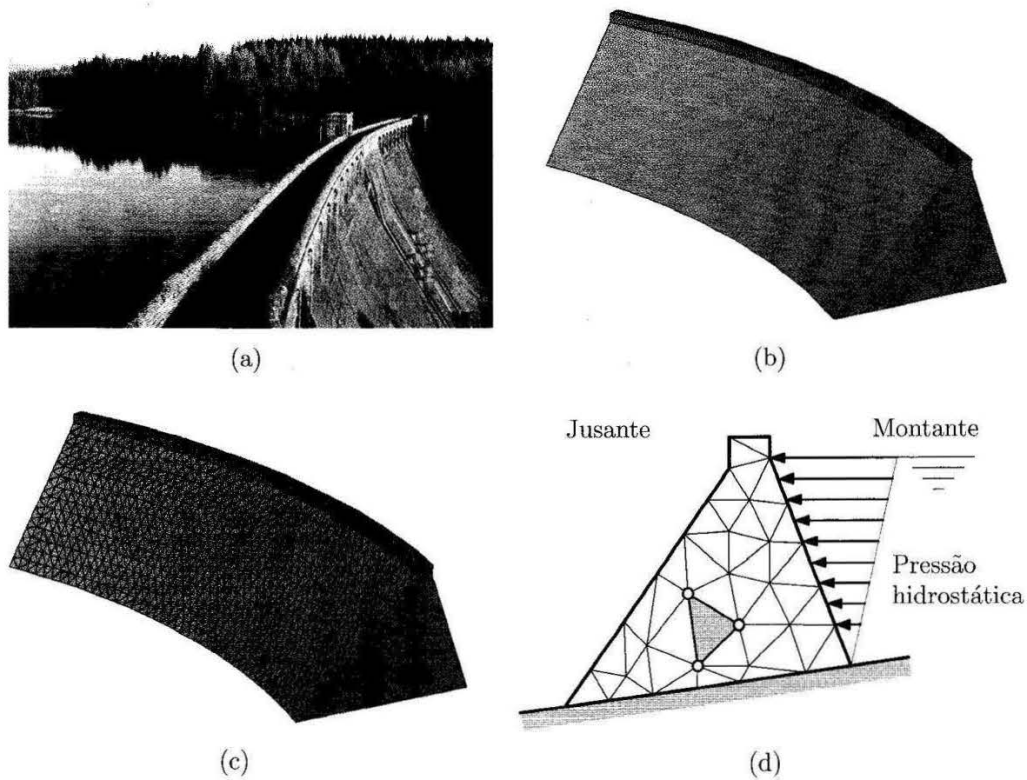


Figura 4.1 Barragem de Loch Laggan (Escócia), para geração de energia eléctrica: (a) fotografia da barragem, (b) modelo geométrico tridimensional simplificado, (c) problema real tridimensional simplificado, discretizado em elementos finitos e (d) representação simplificada do modelo bidimensional discretizado de uma secção da barragem.

Parte I

Introdução e Noções Fundamentais

Resumo Neste capítulo é feita uma revisão sucinta das origens do método dos elementos finitos, centrada nas primeiras contribuições por parte de matemáticos, físicos e engenheiros, desde meados do século XX até à consolidação do método como ferramenta de cálculo, projecto e análise em diversas áreas do conhecimento. É também sugerido, no final do capítulo, um Guia de Leitura para este livro, com a intenção de orientar o percurso de leitores com diferentes interesses e distintas formações académicas.

1.1 A origem do método dos elementos finitos

A ideia básica subjacente ao Método dos Elementos Finitos, frequentemente designado por MEF, é a modelação de um problema genérico que envolve meios contínuos, através da análise de partes discretas desses meios, para os quais é possível conhecer ou obter uma descrição matemática do seu comportamento. A este processo de análise estruturada das partes em detrimento do todo dá-se o nome de discretização. Cada elemento discreto — o elemento finito — e as leis matemáticas que regem o seu comportamento contribuem para o conhecimento e a análise do problema global. A esta passagem de escala da análise ao nível de cada elemento finito como entidade individual para a análise do todo dá-se o nome de agrupamento ou *assemblagem*. Pode dizer-se, portanto, que a perspectiva do utilizador quando confrontado com uma abordagem de cálculo através do MEF passa por resolver um dado problema complexo, ou mesmo sem solução analítica, através da resolução sequencial e estruturada de vários problemas mais simples e com solução matemática (exacta ou aproximada), que,

quando agrupados, formam ou conduzem a uma solução do problema global inicial. Associada a este procedimento está, quer do ponto de vista matemático quer da perspectiva física, uma filosofia inerente ao raciocínio de engenharia e à sua habilidade em traduzir um fenómeno ou uma estrutura complexa — o modelo real — nos seus constituintes mais básicos — o modelo ideal —, iniciando por estes a resolução do problema.

Tal como qualquer método que, com o passar do tempo, se torna numa ferramenta clássica e transversal a várias áreas da engenharia, pode ser complicado definir exactamente onde e quando o método começou ou surgiu pela primeira vez. Consequentemente, esta secção não tem a intenção de proporcionar ao leitor uma visão extensiva e completa das origens do método dos elementos finitos, ainda antes de este ser designado dessa forma. Pretende-se, apenas e tão-somente, dar uma perspectiva histórica minimamente rigorosa do ponto de vista das contribuições mais importantes e fulcrais para o desenvolvimento do método, tal como é conhecido e utilizado nos dias de hoje. Tanto quanto possível, nos parágrafos que se seguem concentra-se a atenção nos desenvolvimentos associados de forma mais directa aos diversos ramos da engenharia. Ao leitor interessado em aprofundar mais detalhadamente os seus conhecimentos sobre as origens do método dos elementos finitos recomenda-se que recorra directamente às obras que podem ser consideradas clássicas ou fundamentais nesse contexto, tais como, por exemplo, os livros de: Zienkiewicz, Taylor e Zhu; Zienkiewicz e Taylor; Zienkiewicz, Taylor e Nithiarasu; Zienkiewicz e Morgan; Irons e Ahmad; Bathe; Hinton e Owen; Crisfield; Cook e co-autores; Fish e Belytschko; Hughes; Oñate, e, finalmente, Huebner e co-autores, indicados na lista de referências no final deste capítulo.

A primeira referência explícita conhecida à designação método dos elementos finitos surgiu em 1960 no trabalho de Ray Clough (consultar também o trabalho mais recente do autor, indicado na lista de referências bibliográficas deste capítulo), sobre a análise de problemas de elasticidade em estado plano de tensão. Mais do que estabelecer a nomenclatura que viria a tornar-se a escolhida para o método proposto, no seu artigo original Clough estabelece os procedimentos sistemáticos que estão na base da implementação computacional do MEF para resolver problemas naturalmente discretos. No entanto, contribuições anteriores, tal como, por exemplo, o trabalho de Courant na década de 40 do século XX (1943), apresentam exemplos de metodologias de discretização de meios contínuos em elementos triangulares para resolver numericamente problemas variacionais genéricos e analisar problemas de torção em particular, conforme descrito no artigo de Samuelsson e Zienkiewicz, de 2006. Em 1959, Greenstadt

determina a solução de funções matemáticas através da discretização do domínio das funções em subdomínios contíguos, sendo que cada subdomínio é caracterizado por funções de aproximação próprias. As soluções obtidas para cada subdomínio são compatibilizadas entre si através da imposição de condições de continuidade entre as mesmas.

Os primeiros elementos finitos, ainda que na altura não se tenha recorrido a esta designação, foram sistematizados e descritos no trabalho de Turner e co-autores, em 1956. Neste trabalho, são desenvolvidos três tipos distintos de elemento finito: um elemento triangular, um elemento quadrilátero genérico e um elemento rectangular. Nesta abordagem, a formulação do elemento triangular é baseada em três componentes constantes do tensor das deformações e três modos de deformação de corpo rígido, na análise de problemas planos. Estas seis componentes de deformação são expressas em termos dos seis graus de liberdade do elemento: os deslocamentos nos nós do elemento finito. Desta forma, a aplicação da lei de Hooke permitiu determinar os termos de deformação directamente a partir dos deslocamentos nodais. O elemento finito genérico quadrilátero é obtido a partir da inclusão de um nó artificial interno e da subsequente divisão do elemento quadrilátero em quatro elementos triangulares discretos, conforme descrito no artigo de Gupta e Meek, em 1996. A matriz de rigidez do elemento quadrilátero é então determinada directamente a partir da soma das matrizes de rigidez elementares calculadas para os subelementos triangulares. Os graus de liberdade correspondentes ao nó interno são posteriormente eliminados da formulação através de um procedimento de condensação estática. Finalmente, o elemento rectangular proposto é baseado em cinco componentes do tensor das tensões, sendo que este elemento finito, com quatro nós, não apresentava continuidade em termos das suas funções de interpolação, tendo essa formulação sido revista no trabalho de Pian e Tong, em 1969 — naquele que foi o primeiro artigo da primeira revista internacional dedicada aos métodos numéricos, o *International Journal for Numerical Methods in Engineering* — e mais tarde no trabalho de Wilson e co-autores, em 1973, no primeiro artigo científico em que se introduz o conceito de modos incompatíveis. Este conceito viria a estar na base de formulações avançadas de elementos finitos nos anos que se seguiram.

Do ponto de vista das aplicações em engenharia, particularmente no seio da indústria aeronáutica, convém realçar as contribuições originais de John Argyris e do seu grupo de investigação na área da engenharia estrutural na década de 50 do século XX, com uma série de artigos sobre análise estrutural em regime linear na forma matricial para elementos discretos. Esta abordagem conduziu aos conceitos de matriz de rigidez e matriz de flexibilidade em função de opera-

dores matriciais relacionando deformações e deslocamentos, no primeiro caso, e tensões e forças, no segundo caso. Esta abordagem matricial, particularmente em função de matrizes de rigidez e operadores diferenciais associando deformações a graus de liberdade de deslocamento, veio a revelar-se a metodologia padrão em aplicações do método dos elementos finitos a problemas genéricos de engenharia.

No entanto, a partir dos trabalhos de Zienkiewicz e Cheung em 1965 e 1967, o método dos elementos finitos viria a ganhar generalidade e projecção significativas. Neste trabalho, para além das típicas aplicações de engenharia estrutural, são abordadas outras aplicações no contexto da análise por elementos finitos, através da minimização da energia potencial total de um sistema genérico, alargando assim a aplicabilidade do MEF a qualquer problema que possa ser descrito de forma variacional. O trabalho conjunto destes autores, em particular, conduziria ao primeiro livro de texto sobre o método dos elementos finitos, ao qual se seguiram outras edições, em 1971 e 1977, e, finalmente, a série de edições de Olgierd Zienkiewicz em parceria com Robert Taylor, em 1989 e 1991. Estas publicações são consideradas, ainda presentemente, obras de referência para o estudo do MEF.

Do ponto de vista do desenvolvimento de formulações robustas e sistemáticas para a modelação de problemas não apenas bidimensionais, como no caso das primeiras contribuições para o método dos elementos finitos, mas também tridimensionais, axissimétricos e envolvendo elementos do tipo placa e do tipo casca, o conceito de abordagem isoparamétrica revela-se de extrema importância no cálculo numérico computacional, nomeadamente na presença de elementos distorcidos ou, por exemplo, possuindo lados curvos. Esta formulação, que será apresentada de forma detalhada neste livro, advém das contribuições originais de Bruce Irons nas décadas de 60 e 70 do século XX, que também está intimamente ligado à criação dos algoritmos “frontais” de resolução de sistemas de equações, amplamente utilizados na implementação computacional do método dos elementos finitos. Para além destas contribuições, o conceito de *patch test* — e a sua verificação para uma dada malha de elementos finitos — como condição necessária para uma formulação ser considerada robusta em termos genéricos, também se deve, inicialmente, a Irons. Na sua essência, uma determinada formulação de elementos finitos cumpre os requisitos do *patch test* se, para um modelo linear elástico e sob a influência de determinados valores de deslocamentos impostos, os elementos da malha de elementos finitos escolhida reproduzem de forma exacta estados de tensão e de deformação constantes previstos analiticamente. Outros contributos pioneiros neste tipo de teste numérico,

utilizado até hoje na validação de novos elementos finitos, foram desenvolvidos inicialmente por Strang e Fix, em 1973, do ponto de vista matemático, e, em 1974, por Fraeijs de Veubeke (cujo nome é atribuído ao funcional de três campos — deslocamentos, deformações e tensões — que serve de base matemática para a generalidade de formulações de elementos finitos) e Eduardo de Arantes e Oliveira, pioneiro e impulsionador do desenvolvimento e da divulgação do método dos elementos finitos em Portugal.

Desde a década de 60 do século XX, momento em que surgem os primeiros trabalhos relacionados com o método dos elementos finitos, e até aos dias de hoje, uma série de publicações e trabalhos têm vindo a estabelecer os limites e desafios para o MEF, cada vez mais aplicado a áreas diversas da mecânica estrutural e em diversas escalas, desde problemas macroscópicos até aplicações em domínios moleculares e atômicos. O leitor interessado é convidado a consultar, para além das obras referidas anteriormente, outras com um estado da arte mais alargado, como é o caso, por exemplo, do tratado de Kardestuncer e Norrie, de 1987, e da mais recente *Encyclopedia of Computational Mechanics*, de 2004.

1.2 Guia de leitura

O texto que aqui se apresenta tem por objectivo primordial introduzir os conceitos fundamentais associados ao estudo, à compreensão e à implementação do método dos elementos finitos. Optou-se pela organização do texto em partes e capítulos orientados para o perfil de leitor que esteja neste momento e através desta obra a ter o seu primeiro contacto com o método, e que com este livro pretenda ganhar competências da aplicação do MEF em problemas de engenharia. No entanto, a apresentação dos temas é, tanto quanto possível, genérica e transversal a outras áreas de conhecimento. Não obstante a evolução gradual em termos de complexidade com o avançar dos capítulos, pretende-se que cada capítulo possa ser o mais consistente, modular e auto-suficiente possível, ainda que à custa de se reproduzir alguns pontos fundamentais associados ao MEF em capítulos distintos.

Desta forma, podem seguir-se diferentes percursos de leitura ao longo desta obra. Aconselha-se, por exemplo, ao leitor que inicia o seu percurso no domínio do método dos elementos finitos a leitura completa do Capítulo 2, em que é feita uma introdução aos aspectos gerais do método, e do Capítulo 3, em que se apresenta uma revisão dos conceitos de base associados à álgebra vectorial

e à álgebra tensorial, bem como da notação de Voigt. Apesar de introduzir de forma detalhada alguns aspectos matemáticos que serão explorados em capítulos subsequentes, a leitura do Capítulo 3 pode ser opcional para o leitor que esteja mais à vontade nesse domínio. Para este perfil de leitor, depois de ultrapassada a etapa introdutória, o Capítulo 4 é então o primeiro capítulo com o tratamento matemático inicial do método dos elementos finitos, bem como a sua metodologia e designações, e deve ser bem assimilado antes de se prosseguir a leitura.

Para o leitor que esteja já de alguma forma familiarizado com o método dos elementos finitos, seus procedimentos e sua nomenclatura, pode ser suficiente iniciar o seu estudo a partir da segunda parte desta obra (Capítulo 5), utilizando os capítulos anteriores, particularmente o Capítulo 4, como fonte de referência, sempre que necessário. O Capítulo 5 tem ainda um interesse acrescido para o leitor interessado numa primeira abordagem a problemas de engenharia civil, por exemplo, através de uma metodologia de cálculo recursivo por elementos discretos.

Ao leitor interessado em avançar directamente para a análise de meios contínuos, de modo a compreender a metodologia mais genérica subjacente ao método dos elementos finitos, aconselha-se a leitura a partir do Capítulo 6, isto é, a partir do início da terceira parte desta obra. Este capítulo é fundamental para a compreensão dos que lhe seguem, no qual se apresentam as formulações de vários tipos de elemento finito, e representa uma generalização — no sentido da análise de meios contínuos — dos conceitos introduzidos anteriormente no estudo de sistemas discretos. No Capítulo 6 apresentam-se os procedimentos com os quais se pode obter as equações algébricas de elementos finitos a partir da formulação fraca de um problema, com exemplos práticos de análise térmica e análise estrutural em elasticidade linear, a partir das quais o formalismo matemático do MEF pode ser obtido para a generalidade de problemas de engenharia em domínios contínuos.

Caso esta obra possa servir de referência a um perfil de leitor interessado em compreender e eventualmente implementar diferentes tipos de elemento finito, estando já familiarizado com os conceitos anteriores, então recomenda-se a leitura a partir do Capítulo 7 — Elementos finitos unidimensionais —, prosseguindo no Capítulo 8 — Elementos finitos bidimensionais e axissimétricos — e no Capítulo 9 — Elementos finitos tridimensionais. Em cada um destes capítulos, procurou-se apresentar de forma detalhada as formulações para os tipos de elemento finito mais amplamente utilizados em programas de simulação numérica. Em comum, todos os elementos são baseados em formulações clássicas

isoparamétricas e obtidos a partir da definição do campo de deslocamentos como graus de liberdade nodais.

Enquanto os conteúdos dos primeiros nove capítulos podem facilmente ser abrangidos por cursos de formação superior de primeiro ciclo — destinatários preferenciais das primeira e segunda partes deste livro — e segundo ciclo — destinatários preferenciais da terceira parte deste livro —, procurou-se, na quarta parte desta obra, proporcionar ao leitor um primeiro contacto com tópicos complementares ou mais avançados que possam ser úteis no desenvolvimento de trabalhos de investigação no âmbito de programas de mestrado ou mesmo em ciclos de estudos conducentes ao grau de doutor.

No Capítulo 10, referente aos elementos do tipo casca degenerados de sólidos, procurou-se focar a análise e a modelação de estruturas do tipo placa e casca, através de formulações que possam ser úteis a engenheiros civis e engenheiros mecânicos, quando deparados com o cálculo estrutural recorrendo a ferramentas computacionais. Das muitas metodologias e formulações publicadas nas últimas quatro décadas para elementos do tipo placa e do tipo casca, apresenta-se a mais simples e generalista possível, obtida através da particularização de elementos finitos sólidos tridimensionais e da sua adaptação a estruturas de pequena ou moderada espessura. Apesar de existirem formulações mais complexas e elaboradas publicadas em artigos científicos, as formulações aqui apresentadas continuam a fazer parte das bibliotecas de modelos implementadas em programas comerciais de simulação pelo método dos elementos finitos, sendo ainda amplamente utilizadas na prática, muitas vezes de forma transparente para o utilizador.

O Capítulo 11 enquadra-se no âmbito dos tópicos avançados e complementares. Neste capítulo introduz-se o método das diferenças finitas como uma alternativa eficaz para a análise de sistemas contínuos. Tal como o método dos elementos finitos, este é um método numérico baseado em procedimentos de discretização. Apesar de não ser uma ferramenta de cálculo tão robusta e generalista como o MEF, o método das diferenças finitas permite realizar cálculos e projecto nos domínios da mecânica de fluidos, do escoamento ou movimento de partículas, da condução de calor, do cálculo aproximado do comportamento de placas e cascas, *etc.* Como consequência, resulta o interesse do estudo deste método como tópico adicional, mas complementar, no contexto desta obra.

Finalmente, os tópicos avançados escolhidos para serem abordados neste livro terminam com uma introdução às metodologias de cálculo não-linear e sua importância na análise de problemas complexos, no Capítulo 12. Apesar deste capítulo não ter a pretensão de reproduzir todo o estado da arte no domínio

da implementação e do estudo do método dos elementos finitos na presença das mais variadas não-linearidades, espera-se que o mesmo possa servir de introdução ao leitor mais interessado na aquisição de conhecimentos mais avançados.

Na Figura 1.1 pode ver-se uma representação esquemática dos vários percursos possíveis e aconselhados para a leitura desta obra. Sugerem-se os conteúdos mais adequados para perfis de leitor principiante, iniciado e avançado. Note-se que, além dos percursos sugeridos, este livro pode ainda ser utilizado, com grande vantagem, como fonte e referência de informação relacionada com os métodos aproximados em engenharia e, nomeadamente, o método dos elementos finitos. O conteúdo desta obra pode enquadrar-se facilmente nos conteúdos programáticos de disciplinas das formações de primeiro, segundo e terceiro ciclos, assim como de mestrados integrados de cursos de engenharia das universidades e institutos politécnicos portugueses. Na Figura 1.1 sugerem-se também formas de enquadrar os temas abordados nestas formações académicas.

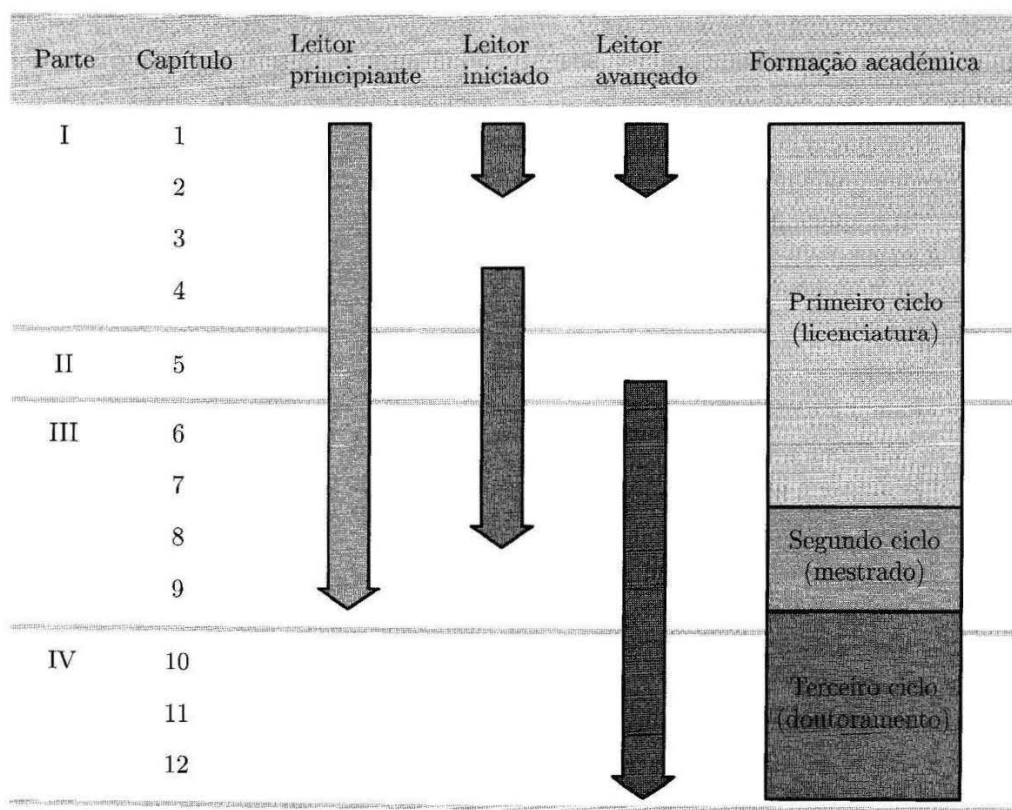


Figura 1.1 Representação esquemática dos vários percursos possíveis e aconselhados para a leitura desta obra.

Referências Bibliográficas

1. Argyris, J.H. Energy Theorems and Structural Analysis — A Generalized Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations — Part I: General Theory, *Aircraft Engineering* **26**(10):347–356, **26**(11):383–394, 1954, **27**(2):42–58, **27**(3):80–94, **27**(4):125–134, 1955.
2. Argyris, J.H. Die Matrizentheorie der Statik, *Ingenieur-Archiv* **25**(3):174–192, 1957.
3. Argyris, J.H., Kelsey, S. Energy Theorems and Structural Analysis — A Generalized Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations — Part II: Applications to Thermal Stress Problems and St. Venant Torsion, *Aircraft Engineering* **26**(12):410–422, 1954.
4. Argyris, J.H., Kelsey, S. The Analysis of Fuselages of Arbitrary Cross-Section and Taper — A DSIR Sponsored Research Programme on the Development and Application of the Matrix Force Method and the Digital Computer, *Aircraft Engineering* **31**(3):62–74, **31**(4):101–112, **31**(5):133–143, **31**(6):169–179, **31**(7):192–203, **31**(8):244–256, **31**(9):272–283, 1959.
5. Argyris, J.H., Kelsey, S. *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth, Londres, Reino Unido, 1960.
6. Bathe, K.-J. *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Nova Jérsea, Estados Unidos da América, 1996.
7. Clough, R.W. *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*, Proceedings of the 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, pp. 345–378, Pittsburgh, Estados Unidos da América, 1960.
8. Clough, R.W. Early History of the Finite Element Method from the View Point of a Pioneer, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **60**(1):283–287, 2004.
9. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4.^a edição, John Wiley & Sons, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2002.
10. Courant, R. Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration, *Bulletin of the American Mathematical Society* **49**:1–23, 1943.
11. Crisfield, M.A. *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis — Linear Analysis*, Vol. 1, Pineridge Press, Swansea, Reino Unido, 1986.
12. Crisfield, M.A. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures — Essentials*, Vol. 1, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido, 1996.
13. de Arantes e Oliveira, E.R. The Patch Test and the General Convergence Criteria of the Finite Element Method, *International Journal of Solids and Structures* **13**(3):159–178, 1977.
14. Ergatoudis, J., Irons, B.M., Zienkiewicz, O.C. Curved, Isoparametric “Quadrilateral” Elements for Finite Element Analysis, *International Journal of Solids and Structures* **4**(1):31–42, 1968.
15. Fish, J., Belytschko T. *A First Course in Finite Elements*, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido, 2007.
16. Fraeijs de Veubeke, B. Variational Principles and the Patch Test, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **8**(4):783–801, 1974.

17. Greenstadt, J. On the Reduction of Continuous Problems to Discrete Form, *IBM Journal of Research and Development* **3**(4):355–363, 1959.
18. Gupta, K.K., Meek, J.L. A Brief History of the Beginning of the Finite Element Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **39**(22):3761–3774, 1996.
19. Hinton, E., Owen, D.R.J. *An Introduction to Finite Element Computations*, Pineridge Press, Swansea, Reino Unido, 1980.
20. Huebner, K.H., Dewhirst, D.L., Smith, D.E., Byrom, T.G. *The Finite Element Method for Engineers*, 4.^a edição, John Wiley & Sons, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2001.
21. Hughes, T.J.R. *The Finite Element Method — Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2000.
22. Irons, B.M. *Numerical Integration Applied to Finite Element Methods*, Conference on the Use of Digital Computers in Structural Engineering, Universidade de Newcastle, Newcastle, Reino Unido, 1966.
23. Irons, B.M. A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **2**(1):5–32, 1970.
24. Irons, B., Ahmad, S. *Techniques of Finite Elements*, Halsted Press, Chichester, Reino Unido, 1980.
25. Irons, B.M., Razzaque, A. *Experience with the Patch Test for Convergence of the Finite Element Method*, Mathematical Foundations of the Finite Element Method, A.K. Aziz (editor), Academic Press, pp. 557–587, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1972.
26. Kardestuncer, H., Norrie, D.H. (editores) *Finite Element Handbook*, McGraw-Hill, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1987.
27. Oñate, E. *Structural Analysis with the Finite Element Method — Linear Statics: Basis and Solids*, Vol. 1, Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences, Springer-Verlag, Berlim, Alemanha, 2009.
28. Pian, T.H.H., Tong, P. Basis of the Finite Element Methods for Solid Continua, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **1**(1):3–28, 1969.
29. Samuelsson, A., Zienkiewicz, O.C. History of the Stiffness Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **67**(2):149–157, 2006.
30. Stein, E., de Borst, R., Hughes, T.J.R. (editores) *Encyclopedia of Computational Mechanics*, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido, 2004.
31. Strang, G., Fix, G.J. *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Nova Jérsea, Estados Unidos da América, 1973.
32. Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C., Topp, L.J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, *Journal of the Aeronautical Sciences* **23**:805–823, 1956.
33. Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty, W.P., Ghaboussi, J. *Incompatible Displacement Models*, Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, S.J. Fenves, N. Perrone, A.R. Robinson e W.C. Schnobrich (editores), Academic Press, pp. 43–57, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1973.
34. Zienkiewicz, O.C. *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, Londres, Reino Unido, 1971.
35. Zienkiewicz, O.C. *The Finite Element Method*, 3.^a edição, McGraw-Hill, Londres, Reino Unido, 1977.
36. Zienkiewicz, O.C. Origins, Milestones and Directions of the Finite Element Method — A Personal View. *Archives of Computational Methods in Engineering* **2**(1):1–48, 1995.
37. Zienkiewicz, O.C., Cheung, Y.K. Finite Elements in the Solution of Field Problems, *The Engineer* **220**:507–510, 1965.

38. Zienkiewicz, O.C., Cheung, Y.K. *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, Londres, Reino Unido, 1967.
39. Zienkiewicz, O.C., Morgan, K. *Finite Elements and Approximation*, John Wiley & Sons, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1983.
40. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method — Basic Formulation and Linear Problems*, Vol. 1, McGraw-Hill, Berkshire, Reino Unido, 1989.
41. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method — Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity*, Vol. 2, McGraw-Hill, Berkshire, Reino Unido, 1991.
42. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, 6.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2005.
43. Zienkiewicz, O.C., Irons, B.M., Ergatoudis, J., Ahmad, S., Scott, F.C. *Isoparametric and Associated Element Families for Two and Three Dimensional Analysis*, Finite Element Method in Stress Analysis, I. Holand e K. Bell (editores), Tapir Press, pp. 383–432, Trondheim, Noruega, 1969.
44. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Nithiarasu, P. *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*, 6.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2005.
45. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Zhu, J.Z. *The Finite Element Method — Its Basis & Fundamentals*, 6.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2005.

Resumo Neste capítulo abordam-se os passos fundamentais associados ao processo de resolução de um problema genérico de engenharia recorrendo ao método dos elementos finitos. São apresentados alguns dos principais tipos de simulação numérica efectuados com base neste método, dedicando-se especial atenção à modelação de problemas de engenharia que envolvam meios contínuos sólidos, tais como, por exemplo, problemas de mecânica dos sólidos, problemas de mecânica das estruturas, *etc.*

2.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados alguns dos conceitos essenciais necessários à compreensão dos passos fundamentais quando se pretende resolver um problema genérico de engenharia recorrendo ao método dos elementos finitos (MEF).

Em todas as etapas do processo de preparação de uma simulação numérica deve ter-se em conta que os métodos numéricos, tal como, por exemplo, o método dos elementos finitos, são métodos aproximados. Por este motivo, a realização de uma simulação numérica é sempre um modo aproximado para se resolver um problema complexo. Consequentemente, a utilização destes métodos deve ser evitada sempre que existam abordagens ou soluções analíticas para o problema que se pretende resolver. Adicionalmente, quando se recorre à utilização de métodos aproximados para resolver problemas de engenharia, é extremamente importante desenvolver a capacidade de não só identificar todas as possíveis fontes de erros de aproximação mas também estimar a magnitude destes erros.

Em todo o processo de preparação e resolução numérica de um problema de engenharia é de vital importância dominar todos os procedimentos de modelação, isto é, de definição de todas as componentes geométricas, das propriedades dos materiais e dos meios envolvidos, das condições de fronteira e das solicitações a que o sistema a simular se encontra sujeito. A qualidade e o rigor com que estas etapas são definidas vai influenciar de forma determinante o resultado final que se venha a obter.

Nas secções que se seguem são apresentados alguns dos principais tipos de simulação numérica efectuada com base no método dos elementos finitos, bem como os passos principais necessários à determinação da solução de um problema de engenharia por simulação numérica. É dedicada especial atenção à modelação de problemas de engenharia que envolvam meios contínuos sólidos, tais como, por exemplo, problemas de mecânica dos sólidos, de mecânica dos fluidos, de mecânica das estruturas, *etc.*

2.2 Simulação numérica

Actualmente, o método dos elementos finitos é aplicado à análise e ao estudo de fenómenos e problemas muito diversos. Estes vão desde: estudo de sistemas vibratórios; análise do comportamento de materiais; resolução de problemas de condução de calor e de mecânica dos fluidos; electricidade e magnetismo; impacto; conformação plástica de materiais; estruturas metálicas e/ou não-metálicas; dimensionamento de grandes estruturas (barragens, pontes, *etc.*); hidrodinâmica e aerodinâmica; *etc.*

Na modelação do comportamento de materiais, o método dos elementos finitos permite considerar uma grande diversidade de comportamentos e modelos constitutivos, tais como, por exemplo, elasticidade linear (lei de Hooke), plasticidade, viscoplasticidade, hiperelasticidade, termoelasticidade, *etc.*

Ainda em termos de opções de modelação, alguns dos exemplos apresentados nos parágrafos anteriores envolvem taxas de deformação elevadas — efeitos transitórios —, o que geralmente implica a utilização de algoritmos explícitos aquando da resolução do sistema de equações que resulta do método dos elementos finitos, como se poderá ver no Capítulo 12, no que respeita à introdução à análise não-linear, na parte final deste livro.

Nas Figuras 2.1(a) e (b) pode ver-se um exemplo de análise de problemas de dinâmica, nomeadamente a modelação numérica e a análise do impacto de um capacete rodoviário contra um obstáculo rígido. Nesse modelo estão repre-

sentados os níveis de tensão equivalente de von Mises que se desenvolvem na estrutura do capacete como consequência do impacto, depois de definidas uma massa e uma velocidade inicial. O capacete, como se pode observar nas figuras, é discretizado em elementos finitos sólidos tetraédricos, enquanto a cabeça do modelo é simulada recorrendo a uma malha livre constituída por elementos de casca rígidos de três e de quatro nós. A análise representada nas Figuras 2.1(a) e (b) centrou-se na determinação dos estados de tensão e de deformação que se desenvolvem apenas no capacete e, por esse motivo, não se representam resultados de tensões no modelo da cabeça. Frequentemente, quando se recorre ao método dos elementos finitos para resolver problemas de elevada complexidade, como é o caso, o utilizador pode optar por analisar apenas parte do modelo computacional de que dispõe (como no caso representado nas figuras), avançando gradualmente a partir de uma solução inicial mais simples para soluções mais complexas e cada vez mais realistas.

Na Figura 2.2 mostra-se um instante da simulação numérica do impacto balístico de um projectil deformável contra um alvo construído numa liga de alumínio, com perfuração completa. Comparativamente com o problema apresentado anteriormente, representado nas Figuras 2.1(a) e 2.1(b), este modelo numérico contempla mecanismos de fractura e dano, através dos quais se consegue monitorizar e avaliar o grau de destruição do alvo, sendo visível na figura a degradação e a perda de material deste último. De forma global, quer o projectil quer o alvo são modelados através de modelos constitutivos elastoplásticos, incluindo níveis de deformação elevados e permanentes (não recuperados elasticamente).

Um sistema que envolva muitos componentes e materiais com comportamentos distintos é um exemplo de sistema complexo cuja análise beneficia da utilização de métodos numéricos como o método dos elementos finitos. A simulação de impacto em automóveis ou outros meios de transporte é um desses casos. Nas Figuras 2.3(a) a (c) pode observar-se um modelo de uma porta de automóvel utilizado para simular numericamente um choque lateral e estudar a capacidade quer de absorção de energia quer de protecção de passageiros de diversos sistemas de protecção inseridos na estrutura da porta.

Na área dos processos tecnológicos, o método dos elementos finitos constitui uma abordagem de uso alargado e de extrema eficiência no auxílio ao projecto de ferramentas, na previsão de defeitos de peças finais a obter e no ajuste de parâmetros de fabrico de peças metálicas, de entre outras aplicações, em processos convencionais de transformação, tais como a estampagem e a extrusão, ou em processos com implantação em larga escala mais recente, tal como a hidroformagem, por exemplo.

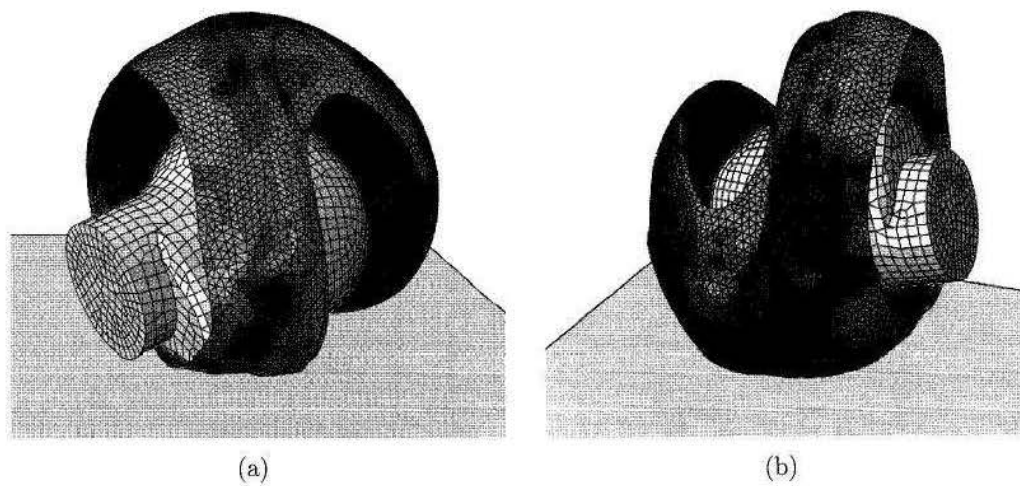


Figura 2.1 Modelação numérica e análise do impacto (a) frontal e (b) posterior de um capacete rodoviário contra um obstáculo rígido (ver anexo a cores).

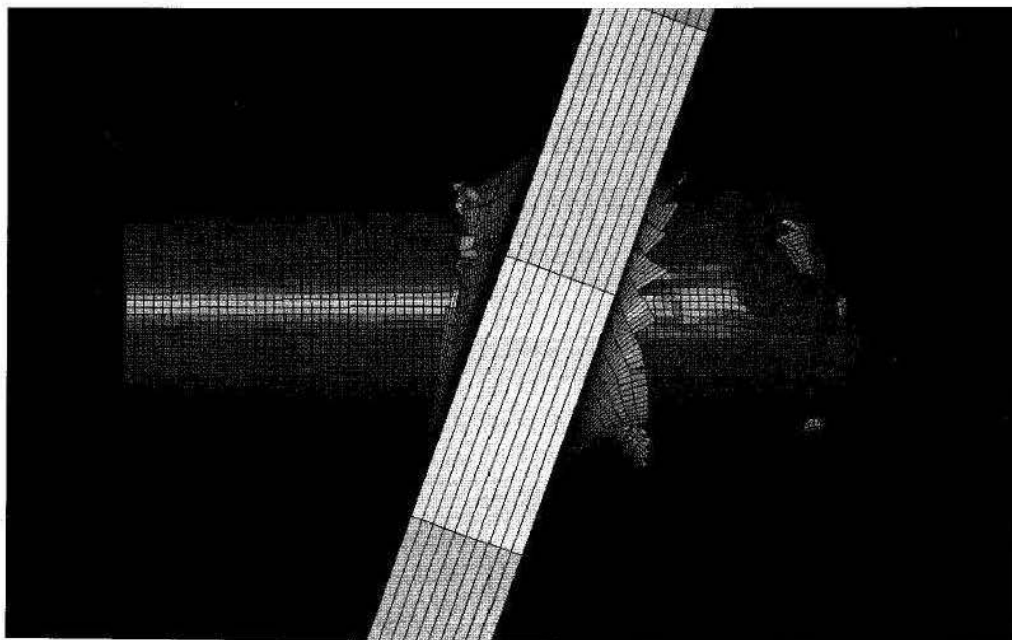


Figura 2.2 Modelação numérica do impacto balístico de um projectil contra um alvo metálico, com perfuração completa (ver anexo a cores).

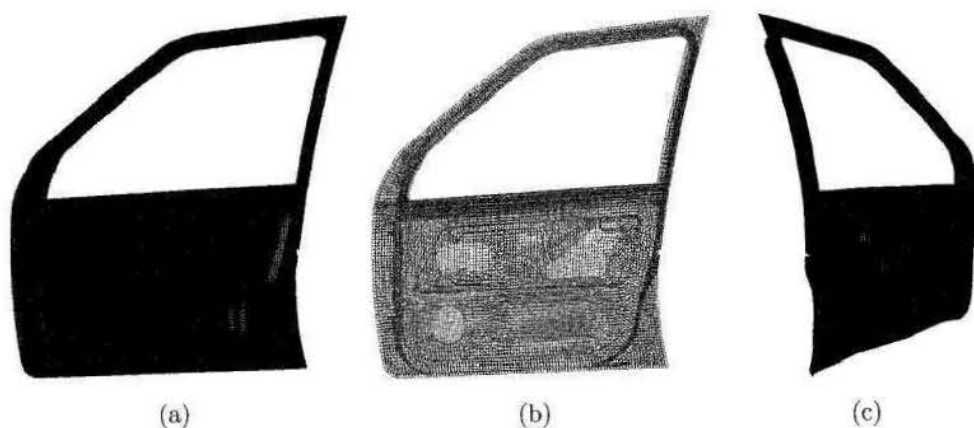


Figura 2.3 Modelo numérico de uma porta de automóvel utilizado no estudo da capacidade de absorção de energia num impacto lateral: (a) modelo geométrico tridimensional, (b) malha de elementos finitos e (c) porta deformada após o impacto (ver anexo a cores).

Nas imagens das Figuras 2.4(a) e (b) está representada uma peça metálica, em alumínio, frequentemente designada por *s-rail*, utilizada na indústria automóvel e obtida por embutidura numa etapa única. Na imagem da Figura 2.4(b), correspondente ao final da simulação do processo de estampagem e onde estão representados os elementos finitos utilizados, é possível observar um detalhe do aparecimento de rugas na superfície do componente final. Estes defeitos podem inviabilizar o produto obtido em termos funcionais. Neste caso, a simulação numérica baseada no método dos elementos finitos pode servir para identificar e prever, no início do projecto, eventuais problemas que são passíveis de ocorrer durante o processo de fabrico, permitindo ao engenheiro ou projectista proceder a eventuais correcções no projecto das ferramentas e noutros parâmetros envolvidos no processo. Nas Figuras 2.5(a) e (b) mostra-se o resultado da simulação do processo de conformação plástica por embutidura de um copo, a partir de uma chapa metálica circular, recorrendo a um punção cilíndrico e a uma matriz cónica. O copo cónico obtido é caracterizado por apresentar defeitos de enrugamento provenientes de tensões de compressão instaladas em determinadas zonas da chapa metálica. Na Figura 2.5(b) estão representados os isovalores de deformação plástica equivalente no componente final.

Passando das aplicações dinâmicas para exemplos de cálculo e modelação que podem ser resolvidos de forma quase-estática, na Figura 2.6 está representado o exemplo da modelação por elementos finitos de uma placa quadrada simplesmente apoiada ao longo do seu contorno e sujeita a um campo de pressão

uniforme. O tipo de mecanismo de deformação que aí ocorre, com as respectivas deformadas representadas na figura para sucessivos valores de pressão externa crescente, é semelhante ao que ocorre para uma membrana a ser insuflada (garantindo as mesmas condições de contorno), com a formação de rugas em fases intermédias de deformação. Ao contrário dos exemplos anteriores, não é necessário neste caso modelar condições de contacto entre diferentes elementos, sendo no entanto necessário considerar efeitos não-lineares quer em termos do material (elastoplasticidade) quer em termos geométricos (grandes deslocamentos e deformações). Na figura, a escala representada e respectivo gradiente de cores correspondem aos diversos níveis de deformação plástica equivalente, e a malha a cinzento representa a configuração geométrica da placa antes da aplicação do campo de pressão externa (geometria não-deformada).

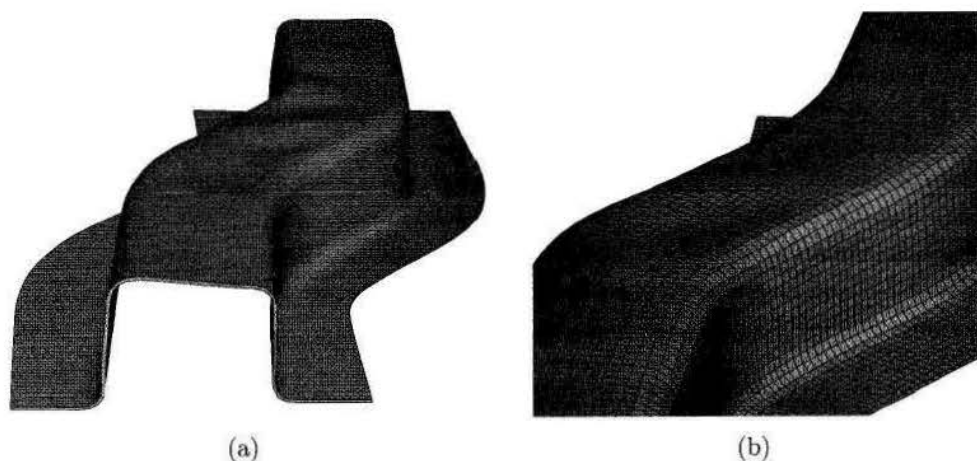


Figura 2.4 Resultado da simulação numérica da conformação plástica por embutidura de um componente metálico para a indústria automóvel: (a) vista geral do componente e (b) pormenor da malha de elementos finitos deformada (ver anexo a cores).

Do ponto de vista das aplicações de ordem estrutural integradas com solicitações dinâmicas do tipo escoamento de fluidos, apresenta-se, a título de exemplo, o projecto, o cálculo e a concepção de um avião para aeromodelismo, cujo modelo em fotorrealismo está representado na Figura 2.7(a). Do ponto de vista da resistência estrutural, interessa calcular os esforços sobre a estrutura considerando efeitos estáticos e dinâmicos, estes últimos particularmente importantes e provenientes do escoamento do ar em torno da estrutura durante o voo da aeronave. Na Figura 2.7(b) encontra-se representado o modelo de elementos finitos criado para a estrutura completa, onde se pode observar o elevado grau de

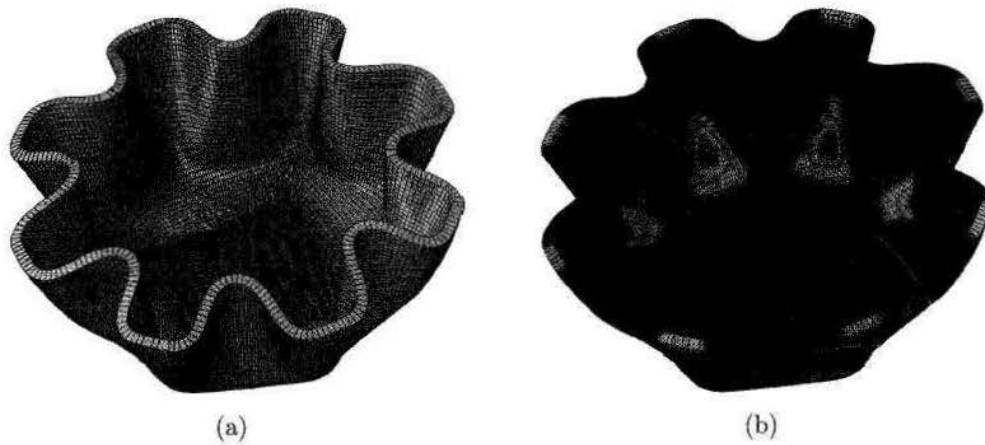


Figura 2.5 Resultado da simulação numérica da conformação plástica por embutidura de um copo cónico: (a) malha de elementos finitos do componente final e (b) representação dos isovalores de deformação plástica equivalente (ver anexo a cores).

refinamento da malha de elementos finitos em algumas zonas da estrutura. Nas Figuras 2.8(a) e (b) são mostradas ampliações das malhas de elementos finitos utilizadas na zona frontal e posterior do modelo construído. Ainda que esse modelo possa ser útil para uma análise global por simulação numérica da estrutura, em problemas complexos torna-se muitas vezes útil construir modelos parciais, concentrados em pontos-chave do modelo realista, tais como, por exemplo, ligações entre diferentes componentes, zonas estruturais com diferentes secções e materiais, zonas eventualmente críticas em termos de esforços, *etc.* Desta forma torna-se possível realizar uma série de análises localizadas preliminares.

Ainda como exemplo de uma análise de um problema com acoplamento de mecânica estrutural e mecânica dos fluidos, mas neste caso concentrando a análise neste último campo, mostra-se, na Figura 2.9, a modelação numérica do comportamento hidrodinâmico do casco do veleiro Endeavour, da Royal Yacht Squadron (Reino Unido), que concorreu à America's Cup em 1934. Enquanto nas aplicações anteriores a malha de elementos finitos coincide e reproduz completamente a estrutura a modelar, neste caso torna-se interessante abordar o problema através da utilização de uma malha de elementos finitos associada não ao casco, mas sim à envolvente espacial do mesmo. O primeiro caso — malha de elementos finitos coincidente com o modelo a estudar — designa-se por abordagem do tipo “lagrangiana”, enquanto que o segundo — malha de elementos finitos coincidente não com o modelo, mas sim com o meio contínuo que interage com o objecto — designa-se por abordagem do tipo “euleriana”.

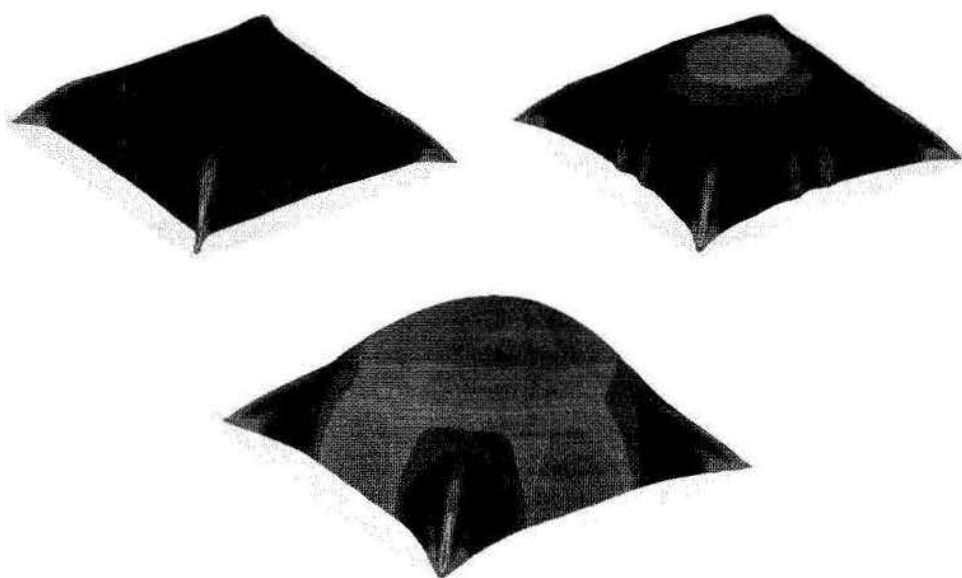


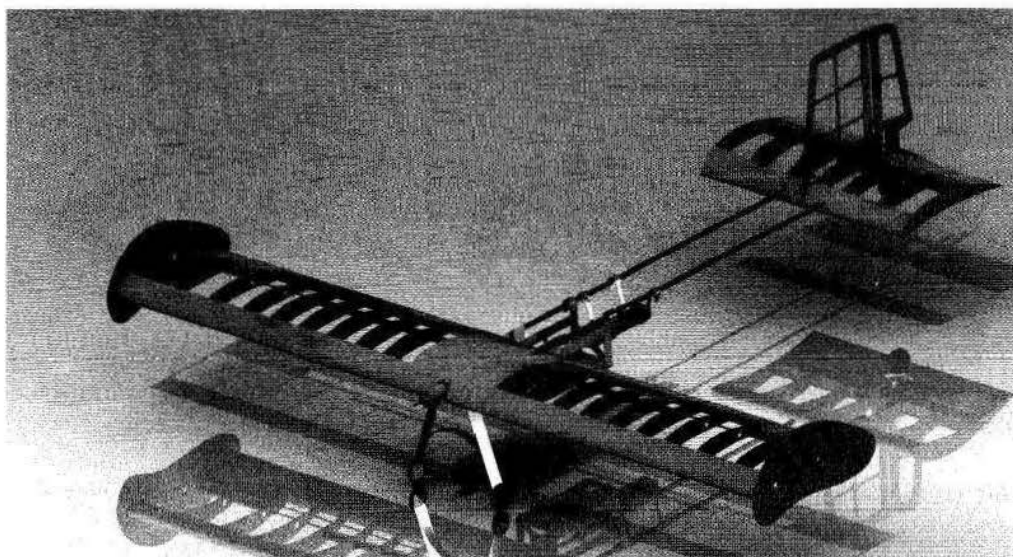
Figura 2.6 Simulação numérica pelo método dos elementos finitos da deformação de uma placa sob acção de uma pressão externa (ver anexo a cores).

Estes conceitos possuem implicações muito mais profundas do que aquelas que meramente se podem depreender da análise do exemplo apresentado. Porém, devido ao carácter introdutório deste texto, não se revela adequado proceder-se ao seu aprofundamento. No entanto, importa que o leitor fique com a percepção de que os conceitos introdutórios inerentes ao método dos elementos finitos, que serão apresentados e desenvolvidos no decorrer desta obra, possuem um amplo espectro de aplicação nas mais variadas áreas do conhecimento tecnológico.

Nas próximas secções deste capítulo são descritos de forma genérica os conceitos básicos inerentes à utilização e à implementação de procedimentos no âmbito do método dos elementos finitos, antes da introdução formal e rigorosa deste método nos capítulos seguintes.

2.3 Método dos elementos finitos: O que é?

Tal como foi descrito no capítulo anterior, em termos históricos o método dos elementos finitos (MEF) é um poderoso método matemático de análise e resolução, quase sempre aproximada, de problemas científicos e de engenharia. Este método numérico tem origens em trabalhos e desenvolvimentos realizados por



(a)



(b)

Figura 2.7 Projecto de um avião para aeromodelismo: (a) modelo geométrico completo em vista realista e (b) malha de elementos finitos global (ver anexo a cores).

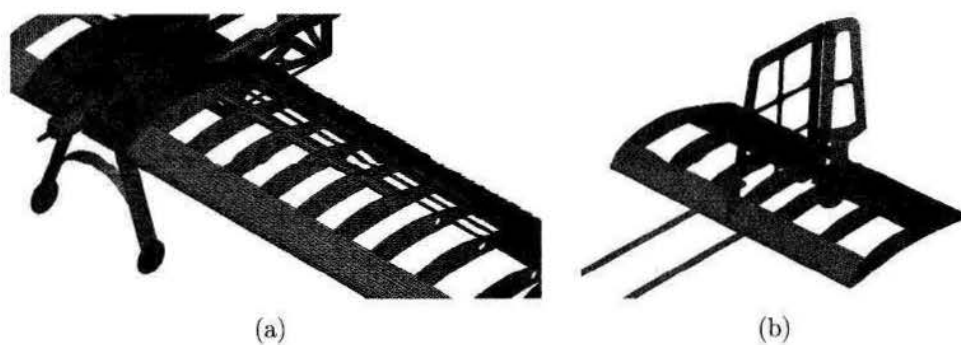


Figura 2.8 Projecto de um avião para aeromodelismo: vista pormenorizada da malha de elementos finitos na zona (a) de fixação da asa e (b) do leme do avião (ver anexo a cores).

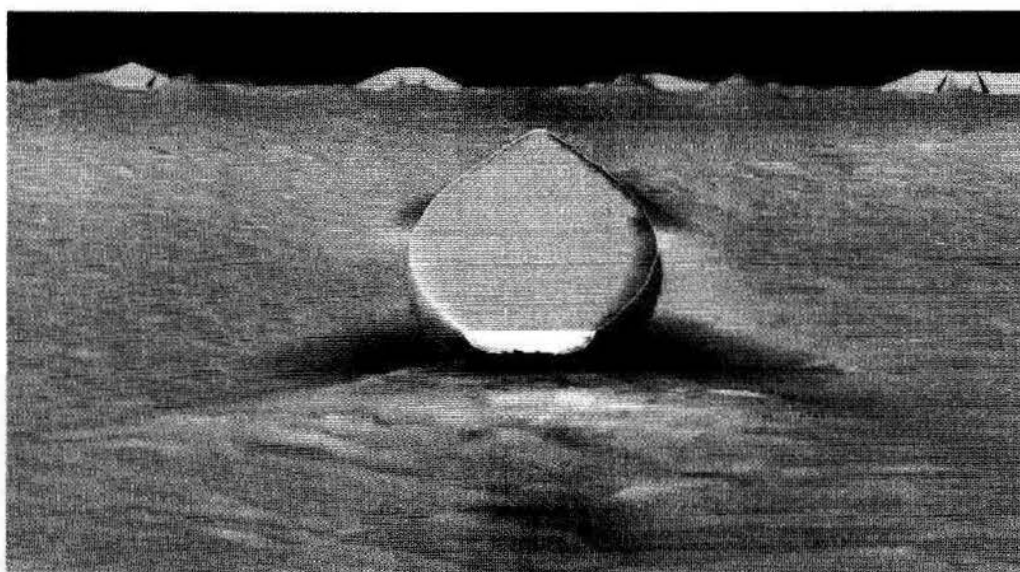


Figura 2.9 Modelação numérica do comportamento hidrodinâmico do casco do veleiro Endeavour, da Royal Yacht Squadron (Reino Unido), que concorreu à America's Cup em 1934 (ver anexo a cores).

matemáticos, físicos e engenheiros. De uma forma geral, o método dos elementos finitos é utilizado na busca de soluções de problemas complexos de diversas áreas do conhecimento, para os quais não se conhece uma solução exacta que possa ser expressa de forma analítica. Como tal, o MEF é um método numérico, e não um método analítico.

As abordagens numéricas (isto é, aproximadas) a problemas de engenharia são necessárias (e muitas vezes as únicas possíveis), pois, na maioria das situações, os métodos analíticos não conseguem dar resposta satisfatória à resolução de problemas reais complexos. Veja-se, por exemplo, o seguinte caso: é possível recorrer à teoria matemática da elasticidade para calcular analiticamente os estados de tensão e de deformação numa viga sujeita a esforços de flexão. No entanto, se se pretender determinar o comportamento da estrutura de suporte do sistema de suspensão de um automóvel quando este faz uma curva, a aplicação analítica daquela teoria revela-se insuficiente e inadequada. Conforme se pode ver em detalhe nas referências apresentadas no final do capítulo anterior, uma das primeiras aplicações do método dos elementos finitos foi precisamente a determinação dos estados complexos de tensão e de deformação em componentes de engenharia submetidos a carregamentos mecânicos diversos. Outro exemplo, com o qual é possível compreender a aplicabilidade do método dos elementos finitos, é o do projecto da estrutura de um edifício. Existem abordagens analíticas com as quais é possível prever o comportamento de uma viga de betão armado. No entanto, não é possível extrapolar esta abordagem ao comportamento de todo um edifício de betão armado. Para tal, torna-se necessário recorrer a métodos numéricos.

A aplicação do método dos elementos finitos a problemas realistas de engenharia, frequentemente complexos, exige, muitas vezes, a disponibilidade de meios computacionais significativos. Deste modo percebe-se que o desenvolvimento do próprio método dos elementos finitos tenha vindo a acontecer de acordo com o aumento da disponibilidade tecnológica e da capacidade de cálculo destes mesmos meios digitais. Para melhor ilustrar o aumento da capacidade de cálculo nas últimas décadas, representa-se na Figura 2.10 a lei de Moore, com a qual se pode determinar a evolução do número de transístores num processador de computador pessoal ao longo do tempo.

Presentemente, o método dos elementos finitos pode ser aplicado à análise e ao estudo de fenómenos e problemas muito diversos, em diferentes áreas do conhecimento. Para além dos exemplos de aplicação apresentados na secção anterior, pode ainda referir-se o estudo de sistemas vibratórios, a análise do comportamento de materiais, a resolução de problemas de condução de calor e mecânica de fluidos, de electricidade e magnetismo, *etc.*

Como ferramenta auxiliar de projecto em problemas de engenharia, o método dos elementos finitos pode ser encarado de duas perspectivas completamente distintas: (i) o ponto de vista do utilizador, que recorre ao uso de um programa comercial de simulação numérica baseado no MEF para resolver pro-

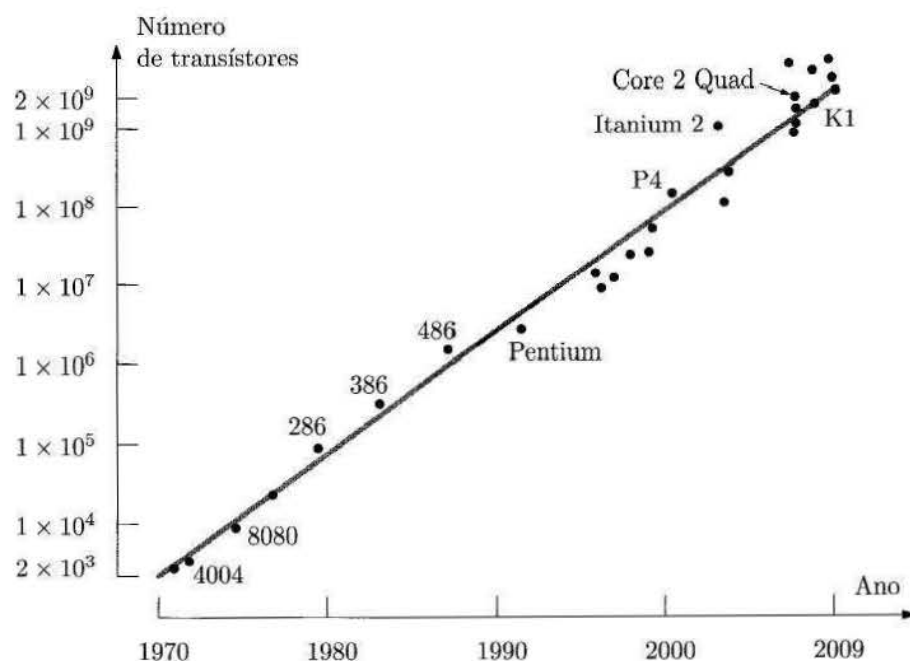


Figura 2.10 Representação gráfica da lei de Moore, com a qual se pode determinar a evolução do número de transistores num processador de computador pessoal ao longo do tempo.

blemas de engenharia, e (ii) o ponto de vista do programador, que desenvolve o programa propriamente dito. No primeiro caso é forçoso que o utilizador domine os processos físicos e/ou mecânicos que pretende estudar, bem como todas as características e especificidades de utilização do método dos elementos finitos relativamente ao problema a analisar. Sendo o método dos elementos finitos um método computacional com o qual é possível analisar e estudar não o sistema real físico, mas sim o modelo virtual criado pelo próprio utilizador, erros grosseiros de modelação conduzirão necessariamente a resultados numéricos que, apesar de correctos para o modelo fornecido pelo utilizador, poderão estar desajustados do problema inicial que o utilizador se propunha resolver. Desta forma, para além do completo conhecimento das características físicas e geométricas do problema real a resolver, o utilizador necessita de ter experiência e espírito crítico para perceber não só as potencialidades mas sobretudo as limitações do modelo que está a simular. Adicionalmente, é ainda essencial que o utilizador questione e interprete de forma fundamentada as soluções fornecidas pelo método dos elementos finitos. Na prática, e nomeadamente para utilizadores inexperientes e/ou em problemas de elevada complexidade, é elevado o risco de,

por um lado, basear a análise de engenharia em modelos que não correspondem à realidade do problema e, por outro lado, acreditar cegamente e sem questionar nas soluções que o computador fornece. Em língua inglesa, esta abordagem recebe, informalmente, a designação de GIGO — *Garbage In, Gospel Out*.

Do ponto de vista do programador, que desenvolve e implementa novos procedimentos, novos modelos materiais ou formulações de elementos finitos, por exemplo, este necessita de dominar, para além das competências necessárias ao perfil de utilizador, todos os métodos matemáticos e numéricos envolvidos, bem como todas as subtilidades da linguagem de programação utilizada. Nesta perspectiva, torna-se ainda necessário conhecer os procedimentos e os esquemas de funcionamento das máquinas — os computadores — em que o programa possa vir a ser implementado, de maneira a, em termos de cálculo, tirar o máximo partido das suas potencialidades.

As duas perspectivas descritas nos parágrafos anteriores são analisadas de forma detalhada nas secções que se seguem.

2.4 O ponto de vista do utilizador

Nos dias de hoje, existem muitos programas de simulação numérica de âmbito generalista baseados no método dos elementos finitos. Estes programas são frequentemente capazes de lidar com tipos de problemas variados. Simultaneamente, é também possível encontrar programas de simulação especializados em fenómenos e/ou aplicações particulares, tais como, por exemplo, a análise do comportamento de materiais compósitos, o estudo do escoamento plástico de materiais metálicos, o estudo de problemas que envolvam impacto a alta velocidade, etc. Dependendo do tipo e da complexidade das análises, estes programas podem ser executados em simples computadores pessoais ou, em alternativa, em supercomputadores.

O método dos elementos finitos é, essencialmente, uma metodologia estratificada. Pode ser aplicado à resolução de problemas unidimensionais, mas, mais frequentemente, pretende-se determinar a solução numa área ou volume tridimensional genérico. Em qualquer um destes casos, deve representar-se o domínio do sistema a analisar ou uma sua simplificação viável. Numa primeira fase, e dependendo assim do tipo de problema a resolver, esse domínio que se pretende estudar é dividido num número finito de segmentos, áreas ou volumes mais pequenos, designados por elementos finitos. Esta tarefa designa-se por discre-

tização. Na Figura 2.11 mostra-se uma representação esquemática do processo de discretização de um domínio por elementos finitos.

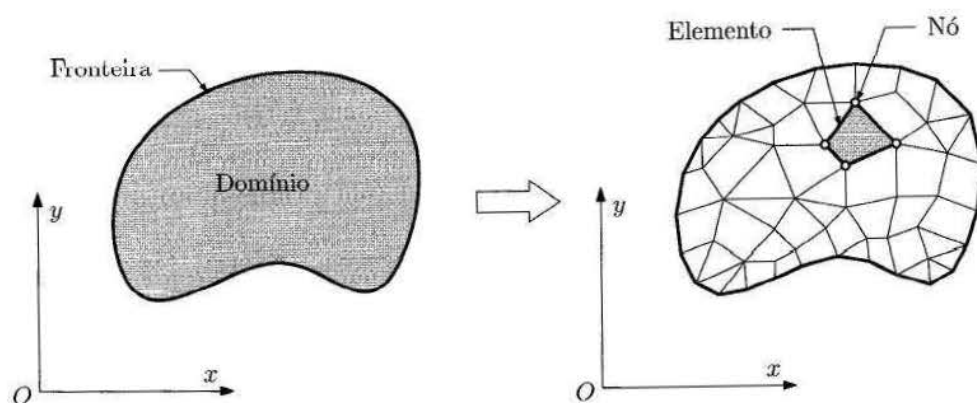


Figura 2.11 Representação esquemática do processo de discretização espacial de um domínio por elementos finitos.

Os elementos finitos podem assumir formas geométricas diversas, tais como as que se representam nas Figuras 2.12(a) a (c). Para resolver problemas unidimensionais (ou constituídos por componentes unidimensionais) recorre-se a elementos finitos em forma de segmentos. No caso de problemas bidimensionais, os elementos são frequentemente quadriláteros ou triângulos. Em análises tridimensionais estes são geralmente hexaedros, tetraedros ou pentaedros. Note-se, no entanto, que esta não é certamente uma lista exaustiva dos tipos possíveis de elementos finitos.

Limitando para já a discussão a uma análise linear elástica aplicada a problemas clássicos de engenharia, a primeira variável a determinar numa análise pelo método dos elementos finitos é, frequentemente, o campo de deslocamentos de um número finito de pontos do sistema. Estes pontos designam-se por nós da malha de elementos finitos. Os nós encontram-se normalmente nos vértices dos elementos, como se pode ver nas Figuras 2.11 e 2.12. Porém, dependendo do tipo de formulação de elemento finito utilizada, podem existir nós a meio das suas arestas, nas suas faces ou ainda no seu interior. Como facilmente se entenderá após a leitura dos capítulos seguintes, os nós pertencentes à fronteira de elementos adjacentes têm forçosamente de ser comuns a todos os elementos que aí se encontram. Por esta razão, não é possível discretizar um meio contínuo em elementos que não coincidam nos seus nós. Nas Figuras 2.13(a) e (b)

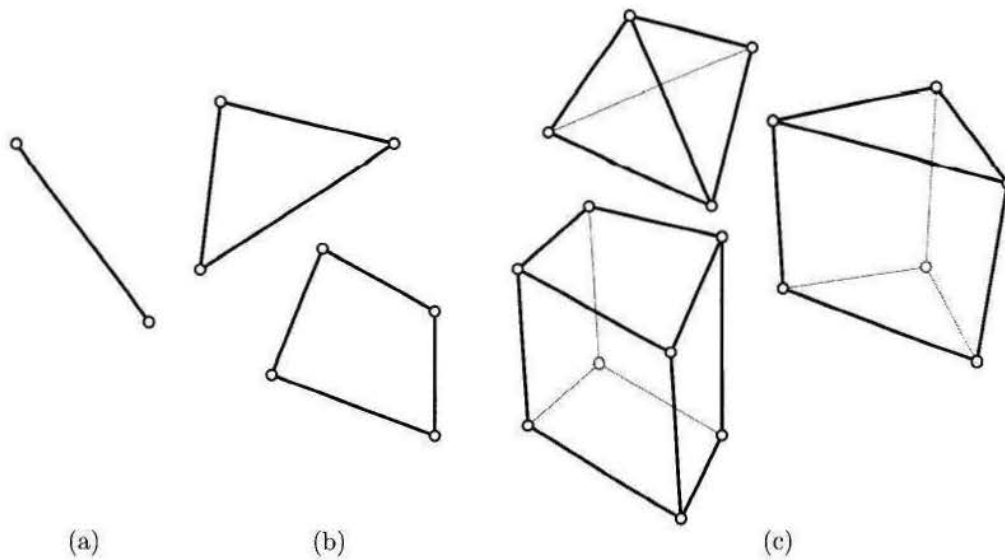


Figura 2.12 Algumas formas geométricas possíveis para elementos finitos. Elementos finitos: (a) unidimensional, (b) bidimensionais e (c) tridimensionais.

podem ver-se exemplos de malhas bidimensionais de elementos finitos dos tipos admissível e não-admissível, respectivamente.

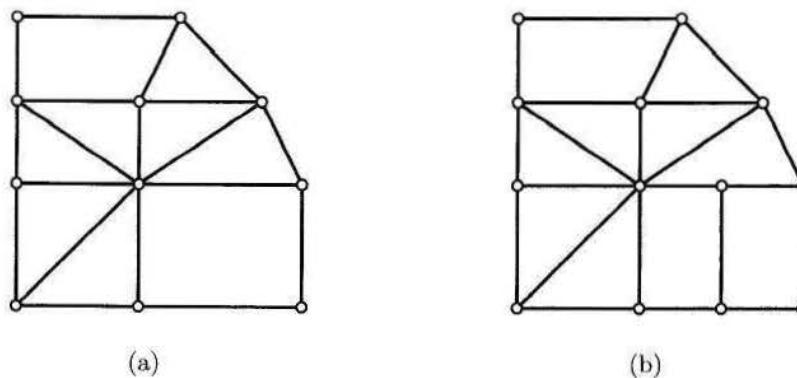


Figura 2.13 Exemplo de uma malha bidimensional de elementos finitos (a) admissível e (b) não-admissível.

Assim, através da análise numérica efectuada com o método dos elementos finitos calculam-se, numa primeira fase, os deslocamentos nos nós para um carregamento particular aplicado ao domínio a analisar. Subsequentemente, o

deslocamento de cada ponto do elemento finito pode ser determinado pelos valores dos deslocamentos dos nós desse mesmo elemento, isto é, em função dos deslocamentos nodais.

Deste modo, torna-se possível substituir o problema de determinar o deslocamento de um número infinito de pontos de um domínio contínuo pelo cálculo dos deslocamentos de um número finito de pontos — os nós da malha de elementos finitos. O deslocamento de qualquer outro ponto pode assim ser definido em função dos deslocamentos dos nós do elemento a que o ponto pertence.

Considerando, por exemplo, um modelo bidimensional, o deslocamento de cada nó pode ser decomposto em duas componentes mutuamente perpendiculares, uma paralela a um eixo de referência Ox e outra paralela a um eixo Oy . Estas componentes de deslocamento designam-se por graus de liberdade ou, de forma abreviada, por g.l. No caso bidimensional referido, cada nó tem dois graus de liberdade, identificados com as variáveis de deslocamentos desse nó relativamente aos dois eixos coordenados referidos. De forma análoga, para o caso de um elemento finito tridimensional, cada nó tem três graus de liberdade, relacionados com os deslocamentos desse ponto segundo três direcções espaciais ortogonais.

Se um determinado problema for discretizado de modo a ter n nós, então o número total de graus de liberdade a determinar é, em todo o modelo, $N_{gl} = n \times n_{gl}$, em que n_{gl} designa o número de graus de liberdade por nó. Comparado com o sistema real, com um número infinito de graus de liberdade, este número de incógnitas será sempre razoável. Como facilmente se compreenderá, o tempo de cálculo — e o conseqüente custo da análise numérica — aumenta naturalmente com o número total de graus de liberdade do modelo. Convém notar que a escolha das variáveis de deslocamento para graus de liberdade nodal não é única, podendo uma dada formulação de elementos finitos, aplicados a um tipo de problema específico, contemplar também graus de liberdade nodais de rotação, tal como é o caso dos elementos finitos unidimensionais do tipo viga e contínuos do tipo placa/casca, que serão descritos em detalhe noutros capítulos deste livro.

Uma vez determinados os deslocamentos nodais, o programa de simulação numérica pelo método dos elementos finitos passa à tarefa de calcular as deformações correspondentes e, a partir destas, o estado de tensão. Posteriormente, toda esta informação é disponibilizada ao utilizador para ser analisada. Os aspectos particulares deste cálculo serão apresentados de forma detalhada nos capítulos seguintes, para cada uma das formulações de elementos finitos analisada.

Consequentemente, interessa questionar quais são as tarefas que se exigem a um analista quando este utiliza um programa de simulação pelo método dos elementos finitos. De um modo genérico, é necessário passar por três estágios distintos: (i) a fase de pré-processamento, (ii) a fase de análise e (iii) a fase de pós-processamento. Estes estágios são descritos de forma sucinta nas secções que se seguem.

2.4.1 Pré-processamento

A fase de pré-processamento diz respeito à construção do modelo geométrico do sistema a estudar e à definição dos carregamentos e das condições a que este será submetido. Os programas comerciais de pré-processamento incluem frequentemente aplicações de tratamento gráfico que facilitam ao utilizador as tarefas de construir o modelo do componente (ou componentes) a analisar, bem como de tratar da sua representação gráfica no monitor do computador para fácil manuseamento. A qualidade global de uma análise pelo método dos elementos finitos depende, em grande medida, do modo como o utilizador aborda esta fase de pré-processamento, incluindo eventuais simplificações a considerar na modelação e na escolha do tipo de elementos finitos e da malha a utilizar. É também nesta primeira fase que todas as propriedades mecânicas e/ou físicas dos materiais a utilizar no modelo são definidas. Para finalizar, definem-se todos os carregamentos e as restrições a que o modelo possa estar submetido. Estas restrições designam-se frequentemente por condições de fronteira.

Toda esta informação sobre o estudo a realizar é introduzida num ou mais ficheiros de dados de entrada. Estes podem ser criados de modo automático pelo próprio pré-processor ou editados directamente pelo utilizador. A estes ficheiros pode, eventualmente, ser necessário adicionar alguma informação sobre o processo, ou seja, definições suplementares e/ou de ordem numérica sobre o modo como a análise deve ser levada a cabo. Por exemplo, pode ser importante definir exactamente quais são os resultados que interessa obter limitando a análise e, consequentemente, poupando tempo de cálculo e recursos. Uma vez completo, o ficheiro de dados de entrada é submetido à fase de análise. Sempre que as análises digam respeito a modelos simples, é, por vezes, possível produzir ou editar o ficheiro de dados de entrada manualmente num editor de texto ou numa consola. Para o caso de problemas mais complexos, é frequente também que o pré-processor aceite a definição geométrica do modelo a analisar directamente a partir de um programa de CAD (*Computer Aided Design*).

2.4.2 Análise

Na perspectiva de um utilizador, a fase de análise de um código de simulação numérica pelo método dos elementos finitos é muitas vezes imperceptível, constituindo aquilo que se costuma usualmente designar por “caixa-negra”. No entanto, é neste momento que se desenrolam as tarefas mais importantes de todo o processo de simulação numérica pelo método dos elementos finitos, correspondendo à fase em que todos os cálculos são efectuados. Inicialmente, verifica-se toda a informação contida no ficheiro de dados de entrada criado pelo pré-processador. Não existindo erros detectáveis, a análise numérica é levada a cabo e são criados ficheiros de saída contendo toda a informação e todos os resultados requeridos pelo utilizador. Nos casos raros em que os problemas são pouco complexos, pode ser possível analisar directamente os ficheiros de resultados. No entanto, na generalidade dos casos, torna-se forçoso apresentar a informação contida nestes ficheiros de forma mais inteligível, amigável e preferencialmente gráfica. Esta tarefa é da competência do pós-processador. Por vezes, o pré- e o pós-processador podem estar incluídos num mesmo pacote de programas, de modo a facilitar e uniformizar a sua utilização.

2.4.3 Pós-processamento

Como foi já referido, o pós-processador encarrega-se da tarefa de apresentar toda a informação contida nos ficheiros de saída de resultados de diferentes formas gráficas e/ou tabulares. Por exemplo, dependendo dos meios informáticos disponíveis, pode ser possível apresentar os resultados sob a forma de distribuições coloridas de isovalores ou isolinhas, tal como a que se mostra, por exemplo, na Figura 2.14(b). De igual modo, podem ser analisadas secções do modelo, e este pode ainda ser movimentado e rodado espacialmente para facilitar a visualização dos resultados sob diversos pontos de vista.

As etapas envolvidas numa análise típica através do método dos elementos finitos, do ponto de vista do utilizador, podem ser sistematizadas como se mostra no esquema da Figura 2.15.

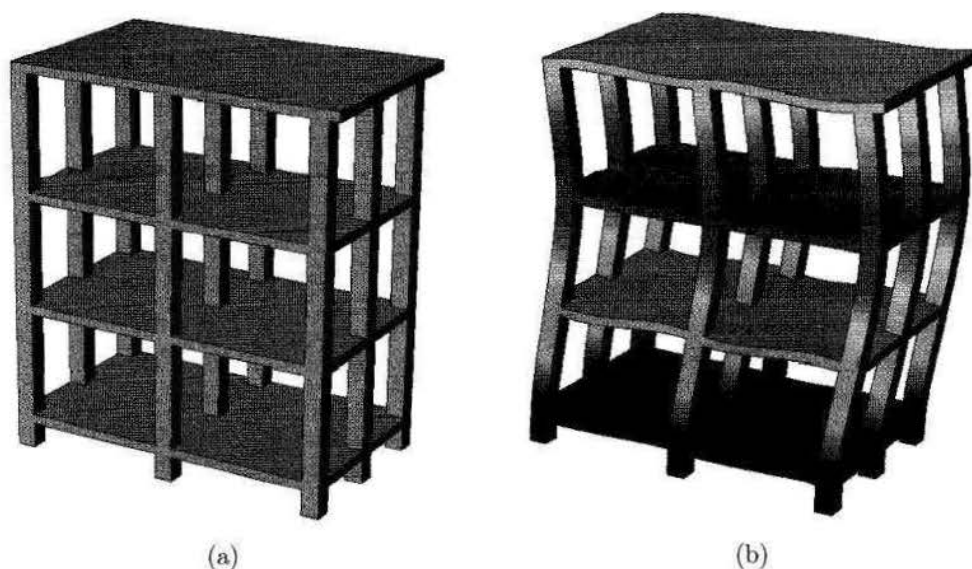


Figura 2.14 Exemplo de modelação de um edifício de betão armado sujeito a uma solicitação sísmica: (a) modelo geométrico da estrutura do edifício e (b) isovalores de deslocamento lateral da estrutura (deformada) do edifício (ver anexo a cores).

2.5 O ponto de vista do programador

O ponto de partida para o programador de códigos de simulação que recorram ao método dos elementos finitos é, de um modo geral, o conjunto de equações diferenciais que regem o fenómeno físico, ou conjunto de fenómenos físicos, que se pretende analisar. A análise pelo método dos elementos finitos é, assim, um processo que permite fornecer um conjunto de soluções numéricas para essas equações sempre que as soluções analíticas não estejam disponíveis ou não sejam simples de determinar. Grande parte do trabalho efectuado neste âmbito não está acessível ao utilizador do programa de simulação numérica. Tal se deve não só à sua complexidade mas também ao seu modo de apresentação pouco inteligível.

Com o texto que se apresenta neste livro, pretende-se transmitir ao leitor uma ideia aprofundada sobre os métodos matemáticos básicos que são subjacentes às formulações do método dos elementos finitos quando aplicado a tipos de problemas diversos. A compreensão destas matérias é essencial para se perceberem as limitações e aplicações dos diferentes tipos de métodos, elementos finitos e análises.

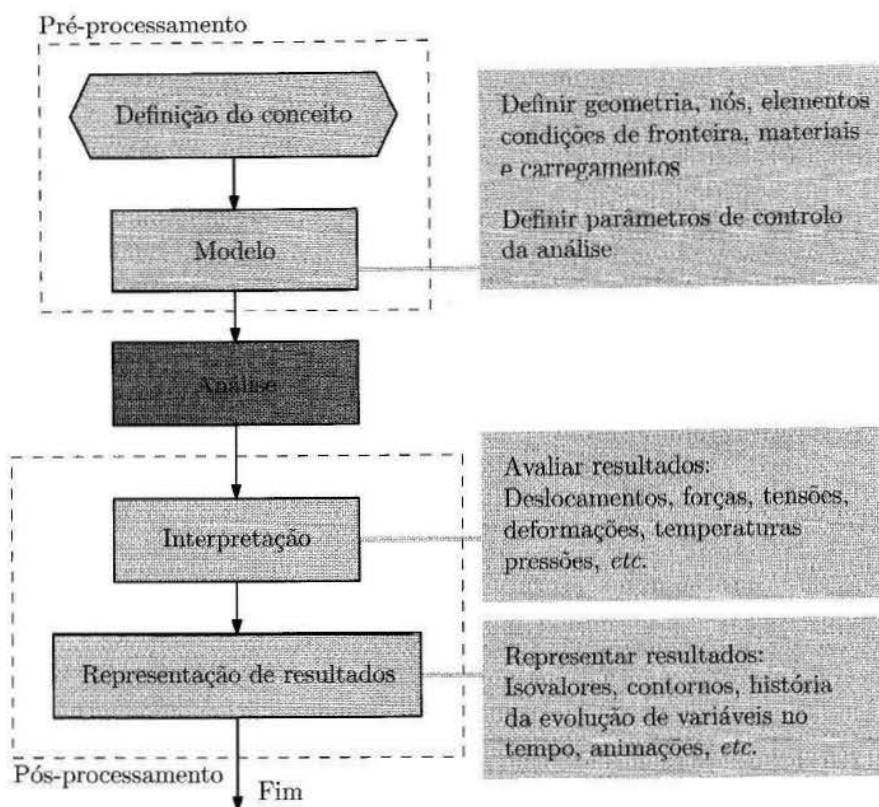


Figura 2.15 Representação esquemática da metodologia de análise típica de um problema recorrendo ao método dos elementos finitos.

Uma vez desenvolvidas as equações do problema, torna-se necessário criar procedimentos para as resolver de forma eficaz, isto é, no mínimo tempo possível. A estes procedimentos, os programadores dão o nome de algoritmos. Alguns pontos de interesse para o programador (que não serão abordados neste texto) são, por exemplo:

- ▶ A determinação e a optimização dos tempos de cálculo despendidos — tempo de processamento da unidade central de processamento (CPU — *Central Processing Unit*);
- ▶ A medição do número de operações matemáticas a efectuar;
- ▶ A optimização dos métodos numéricos implementados;
- ▶ A escolha de modelos de comportamento adequados aos problemas a resolver, etc.

Nos capítulos que se seguem, são introduzidos os conceitos matemáticos que estão na base da compreensão e da implementação de diferentes formulações de elementos finitos.

Referências Bibliográficas

1. Bathe, K.-J. *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Nova Jérsea, Estados Unidos da América, 1996.
2. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4.^a edição, John Wiley & Sons, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2002.
3. Fish, J., Belytschko T. *A First Course in Finite Elements*, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido, 2007.
4. Hinton, E, Owen, D.R.J. *An Introduction to Finite Element Computations*, Pineridge Press, Swansea, Reino Unido, 1980.
5. Hughes, T.J.R. *The Finite Element Method — Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2000.
6. Oñate, E. *Structural Analysis with the Finite Element Method — Linear Statics: Basis and Solids*, Vol. 1, Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences, Springer-Verlag, Berlim, Alemanha, 2009.
7. Reddy, J.N. *An Introduction to the Finite Element Method*, 3.^a edição, McGraw-Hill, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2005.
8. Zienkiewicz, O.C., Morgan, K. *Finite Elements and Approximation*, John Wiley & Sons, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1983.
9. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method — The Basis*, Vol. 1, 5.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2000.
10. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method — Solid Mechanics*, Vol. 2, 5.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2000.
11. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Zhu, J.Z. *The Finite Element Method — Its Basis & Fundamentals*, 6.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2005.

Resumo Neste capítulo apresenta-se a notação adoptada nesta obra para a representação de entidades matemáticas vectoriais e tensoriais. São abordados alguns conceitos fundamentais da álgebra de vectores e da álgebra de tensores, considerando apenas as componentes cartesianas destas entidades matemáticas. São ainda apresentados exemplos de equivalência entre expressões escritas nas notações tensorial absoluta, tensorial indicial e matricial. Por fim, aborda-se a notação de Voigt, usualmente utilizada na implementação numérica do método dos elementos finitos.

3.1 Introdução

Neste capítulo pretende-se apresentar a notação que é adoptada nesta obra para a representação de entidades matemáticas vectoriais e tensoriais. Abordam-se também alguns conceitos fundamentais da álgebra de vectores e da álgebra de tensores. Uma abordagem mais aprofundada destes conceitos poderá ser efectuada com a consulta de obras especializadas nestes tópicos, tais como, por exemplo, as referidas na lista de bibliografia deste capítulo.

Os corpos sólidos podem ser matematicamente definidos num espaço euclidiano tridimensional, associado a um qualquer referencial cartesiano ortonormado, tal como se mostra na Figura 3.1. Assim, um corpo sólido encontra-se associado a um volume V delimitado por uma superfície S . Um determinado ponto P pode ser definido, em relação a um referencial cartesiano ortonormado, pelas suas coordenadas cartesianas $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$. Relativamente aos corpos sólidos, podem ser definidos, em geral, três tipos distintos de grandezas físicas. Estas são

frequentemente designadas por grandezas (i) escalares; (ii) vectoriais (vectores) ou (iii) tensoriais (tensores).

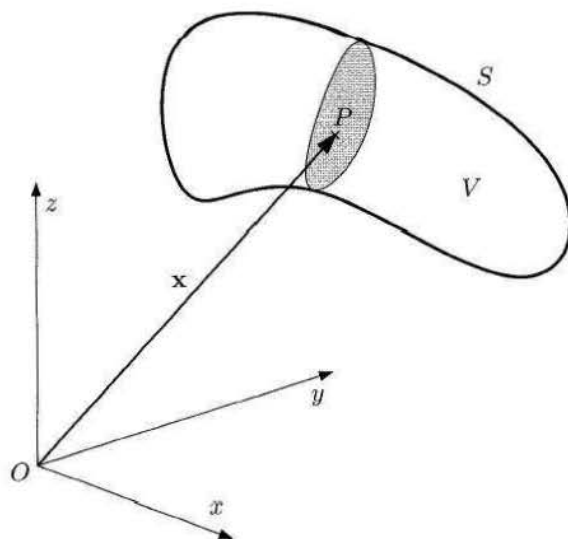


Figura 3.1 Representação esquemática de um corpo sólido definido num espaço euclidiano tridimensional.

As grandezas físicas escalares correspondem a entidades que requerem unicamente a definição da sua magnitude. Deste modo, as grandezas escalares são adequadamente representadas por números reais, ou escalares. A massa m de um corpo sólido, e a temperatura $T(\mathbf{x})$ ou a densidade $\rho(\mathbf{x})$ num dos pontos desse mesmo corpo sólido correspondem a grandezas escalares. Neste contexto, as grandezas escalares podem ser denotadas pelos caracteres latinos em itálico, minúsculos ($a, b, c, \dots$) ou maiúsculos ($A, B, C, \dots$), ou pelos caracteres gregos, minúsculos ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) ou maiúsculos ($\Lambda, \Gamma, \dots$).

Por outro lado, um vector corresponde a uma grandeza física que, para além da magnitude, requer a definição de uma direcção e um sentido. Grandezas físicas, tais como, por exemplo, a força $\mathbf{F}$, a velocidade $\mathbf{v}$ e a aceleração $\mathbf{a}$ correspondem a grandezas vectoriais. Os vectores são geralmente denotados pelos caracteres latinos em negrito, minúsculos ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$) ou maiúsculos ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$).

Em relação a um referencial cartesiano ortonormado, um vector $\mathbf{a}$ num espaço tridimensional é definido pelas suas componentes (cartesianas) $\mathbf{a} \doteq (a_1, a_2, a_3)$. Assim, um vector tridimensional pode ser definido seja pelas suas características: magnitude, direcção e sentido, ou, em alternativa, pelas suas três componen-

tes (escalares) cartesianas. Estas três componentes podem ser representadas, recorrendo a notação indicial, por a_i , com $i = 1, \dots, 3$.

Por fim, matematicamente, o conceito de tensor corresponde à generalização do conceito de vector. Num determinado referencial cartesiano ortonormado, enquanto um vector representa um segmento orientado, o qual define um sentido numa dada direcção espacial, um tensor (cartesiano) de segunda ordem representa uma relação entre duas direcções. Como se verá posteriormente, num espaço tridimensional um tensor de segunda ordem $\mathbf{A}$ pode ser definido por nove (3^2) componentes (cartesianas), isto é, $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ e a_{33} . Em notação indicial, estas componentes são representadas por a_{ij} , com $i, j = 1, \dots, 3$. Atenda-se ainda ao facto de o tensor de segunda ordem $\mathbf{A}$ poder ser também representado pela seguinte matriz:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

É usual denotar estas duas entidades matemáticas de igual modo, pelo que a matriz $\mathbf{M}$ é usualmente designada, sem perda de generalidade, por matriz $\mathbf{A}$. No entanto, deve atender-se ao facto de a matriz $\mathbf{M}$ não corresponder ao tensor de segunda ordem $\mathbf{A}$, mas ser uma sua representação matemática. Os estados de tensão e de deformação associados a um ponto de um corpo deformável são exemplos de grandezas físicas que correspondem a tensores de segunda ordem, passíveis de serem representadas de forma matricial.

Baseado no exposto nos parágrafos anteriores, um tensor $\mathbf{B}$ de terceira ordem num espaço tridimensional é definido por vinte e sete (3^3) componentes (cartesianas) que, em notação indicial, podem ser representadas por a_{ijk} , com $i, j, k = 1, \dots, 3$. Refira-se que neste caso estas componentes podem ser dispostas numa hipermatriz que, no espaço, corresponde a um cubo definido por três matrizes (quadradas) dispostas de forma sequencial.

Generalizando, um tensor $\mathbf{C}$ de ordem k num espaço tridimensional é definido por 3^k componentes (cartesianas) que, em notação indicial, são representadas por

$$a_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k}, \quad \text{com } i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k = 1, \dots, 3.$$

Neste caso as componentes do tensor $\mathbf{C}$ de ordem k podem ser dispostas numa hipermatriz com k dimensões. Assim, pode facilmente verificar-se que a ordem de um tensor corresponde ao número de índices que são utilizados na numeração

das suas componentes. Consequentemente, um vector corresponde a um tensor de primeira ordem e um escalar corresponde a um tensor de ordem 0.

No âmbito das aplicações de engenharia, os tensores de quarta ordem são utilizados, por exemplo, na caracterização das relações constitutivas entre os tensores de segunda ordem de tensão e de deformação.

De modo a não tornar a notação demasiado complexa, as grandezas tensoriais serão denotadas do mesmo modo que as grandezas vectoriais. No entanto, refira-se que, para evitar ambiguidades na notação matemática, procede-se no decorrer deste texto e sempre que se revelar necessário à referência da ordem ou à representação indicial das várias grandezas tensoriais que vão surgindo. Em todo este texto assume-se, a menos que o contrário seja expressamente referido, que a variação de qualquer índice é efectuada no conjunto $\{1, \dots, 3\}$. Assim, na representação de entidades tensoriais adopta-se preferencialmente a notação simbólica, também designada absoluta (não-indicial), recorrendo-se à notação indicial sempre que seja conveniente. Este facto deverá facilitar a associação das entidades e operações matemáticas escritas em notação simbólica, por parte de leitores que não estejam ainda familiarizados com este tipo de notação, com as correspondentes formas escritas em notação indicial. Por fim, refira-se o facto de os leitores que já se encontrem familiarizados com a álgebra de vectores e de tensores não necessitarem de proceder, caso assim o desejem, à leitura das secções seguintes do presente capítulo, podendo prosseguir directamente para o capítulo subsequente.

3.2 Fundamentos de álgebra vectorial

Como foi referido anteriormente, um vector é uma grandeza física que, para além da magnitude, requer a definição de uma direcção e de um sentido. Considerando um referencial cartesiano ortonormado, um vector tridimensional $\mathbf{u}$ pode ser definido seja pelas suas características, isto é, pela sua magnitude, direcção e sentido, ou, em alternativa, pelas suas três componentes (escalares) cartesianas u_i . Designando por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a base associada ao referencial cartesiano ortonormado, o carácter ortonormado do referencial traduz-se na ortogonalidade dos versores (vectores unitários) $\mathbf{e}_i$, definidos segundo o sentido positivo de cada um dos eixos coordenados, tal como se ilustra na Figura 3.2.

Um versor é um vector com magnitude (norma) unitária. Assim, o vector $\mathbf{u}$ pode ser descrito matematicamente como

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3, \quad (3.2)$$

de acordo com a ilustração da Figura 3.3. A magnitude do vector $\mathbf{u}$ corresponde à sua norma, definida por

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}. \quad (3.3)$$

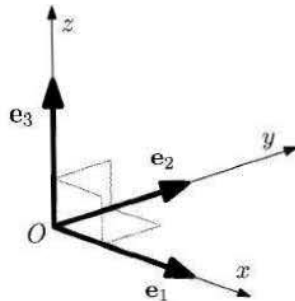


Figura 3.2 Base de um referencial cartesiano ortonormado e respectivos versores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$.

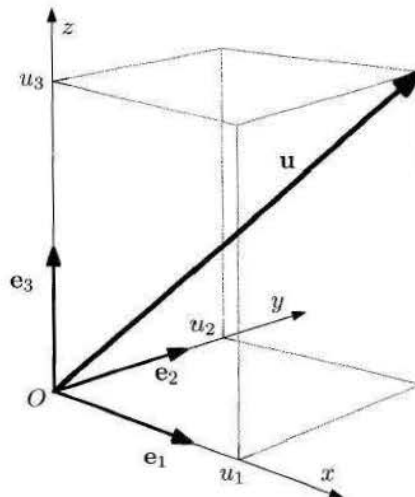


Figura 3.3 Representação geométrica num referencial cartesiano ortonormado de um vector $\mathbf{u}$.

O procedimento através do qual se obtém o resultado da adição de dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ encontra-se ilustrado na Figura 3.4. Geometricamente, a adição de vectores é definida pela regra do paralelogramo, que se traduz no facto de a representação gráfica da soma de dois vectores corresponder à diagonal do

paralelogramo cujos lados são formados pelos vectores a serem somados. Este paralelogramo está representado na Figura 3.4 pelos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em conjunto com as linhas a traço fino. De acordo com a regra do paralelogramo, as componentes w_i do vector soma $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ correspondem algebricamente a

$$w_i = u_i + v_i. \quad (3.4)$$

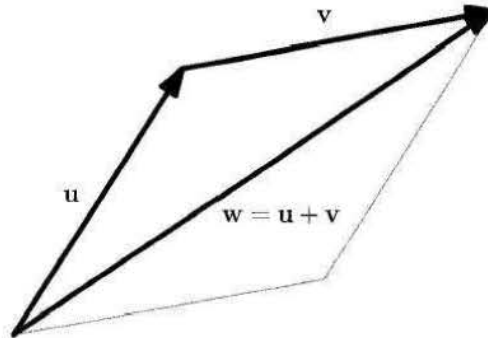


Figura 3.4 Representação gráfica do procedimento através do qual se obtém o resultado da adição de dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Com base na regra do paralelogramo facilmente se verifica que a adição de vectores é comutativa e associativa, isto é,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad (3.5)$$

e

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}, \quad (3.6)$$

respectivamente.

Definindo agora $\mathbf{w}$ como o resultado da multiplicação de um escalar α (real) por um vector $\mathbf{u}$, tem-se

$$w_i = \alpha u_i. \quad (3.7)$$

A operação de multiplicação de um escalar por um vector apresenta as seguintes propriedades:

$$(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}), \quad (3.8)$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u} \quad (3.9)$$

e

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}. \quad (3.10)$$

Deste modo, considerando, por exemplo, $\alpha = -1$, tem-se que as componentes do vector $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$ correspondem a $v_i = -u_i$. Assim, constata-se que ao vector $\mathbf{v}$ simétrico de $\mathbf{u}$ correspondem componentes v_i simétricas de u_i . Consequentemente, a subtracção de dois vectores, $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, corresponde à adição de $\mathbf{u}$ com o simétrico de $\mathbf{v}$, tal como se ilustra na Figura 3.5. Refira-se que a adição de vectores verifica ainda as seguintes propriedades:

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} \quad (3.11)$$

e

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (3.12)$$

em que $\mathbf{0}$ é o vector nulo. Este vector caracteriza-se por possuir norma nula, sendo indeterminados quer a sua direcção quer o seu sentido.

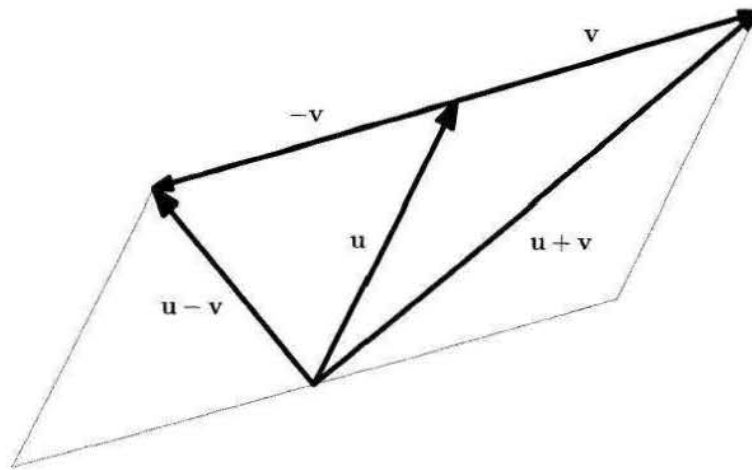


Figura 3.5 Representação gráfica da subtracção de um vector $\mathbf{v}$ ao vector $\mathbf{u}$.

O produto escalar, também designado por produto interno, de dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é o escalar w definido por

$$w = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta, \quad (3.13)$$

em que θ é o ângulo formado pelas direcções dos referidos vectores. O adjectivo escalar desta operação advém do facto de este produto associar um escalar a cada par de vectores. Considerando as componentes dos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, o produto interno pode também ser expresso do seguinte modo:

$$w = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \sum_{k=1}^3 u_kv_k. \quad (3.14)$$

Atendendo ao facto de que $\mathbf{e}_1 \equiv (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 \equiv (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 \equiv (0, 0, 1)$, e considerando a expressão 3.14, facilmente se verifica que

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (3.15)$$

em que δ_{ij} é o símbolo de Kronecker (também designado por delta de Kronecker), definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \Leftarrow i = j \\ 0 & \Leftarrow i \neq j \end{cases}. \quad (3.16)$$

Um exemplo da aplicação da noção de produto escalar consiste na definição do trabalho infinitesimal dW produzido por uma força $\mathbf{F}$ quando o seu ponto de aplicação sofre um deslocamento infinitesimal $d\mathbf{r}$. Neste caso, o referido trabalho corresponde ao produto escalar dos vectores força e deslocamento: $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

A operação de produto escalar de dois vectores apresenta as seguintes propriedades:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{0} = 0, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \quad (3.19)$$

e

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0, \quad (3.20)$$

sendo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ unicamente no caso de $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

A norma de um vector, apresentada na equação 3.3, pode ser definida com base no produto escalar, do seguinte modo:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \quad (3.21)$$

O produto vectorial, também designado por produto externo, de dois vectores é uma operação que aos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, cujas direcções fazem um ângulo θ entre si, faz corresponder um vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, cuja norma corresponde a

$$w = \|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin\theta. \quad (3.22)$$

Assim, a norma de $\mathbf{w}$ corresponde à área do paralelogramo definido pelos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. A direcção do vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é perpendicular ao plano definido pelos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, conforme se mostra na Figura 3.6(a), sendo o seu sentido definido pela regra da mão direita. De acordo com esta regra, fazendo coincidir a mão com o vector $\mathbf{u}$ e fechando-a no sentido correspondente ao menor ângulo θ entre os dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, o sentido do vector $\mathbf{w}$ é indicado pelo polegar, tal como se representa de forma esquemática na Figura 3.6(b). Atenda-se ao facto de a utilização da regra da mão direita ser aplicada pressupondo a adopção de um referencial cartesiano ortonormado dextrogiro (ou directo), em vez de sinistrogio. Um referencial cartesiano ortonormado diz-se dextrogiro no caso de os versores da base verificarem a condição $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, sendo sinistrogio se $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3$.

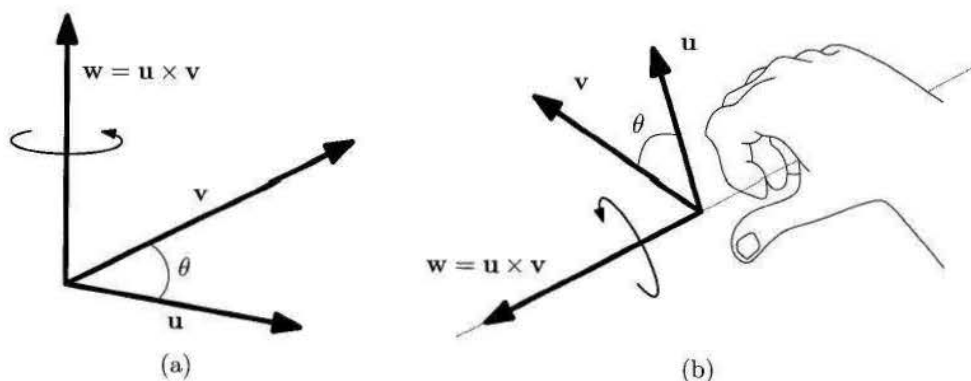


Figura 3.6 (a) Representação do produto externo de dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e (b) representação esquemática da regra da mão direita aplicada ao produto externo de dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

O produto externo $\mathbf{w}$ de dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ pode ser obtido a partir das suas componentes recorrendo à expressão

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \quad (3.23)$$

Resolvendo o determinante obtém-se

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3. \quad (3.24)$$

Da expressão anterior pode verificar-se que o produto externo de dois vectores não é comutativo. No entanto, verifica-se que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \quad (3.25)$$

tal como se ilustra na Figura 3.7.

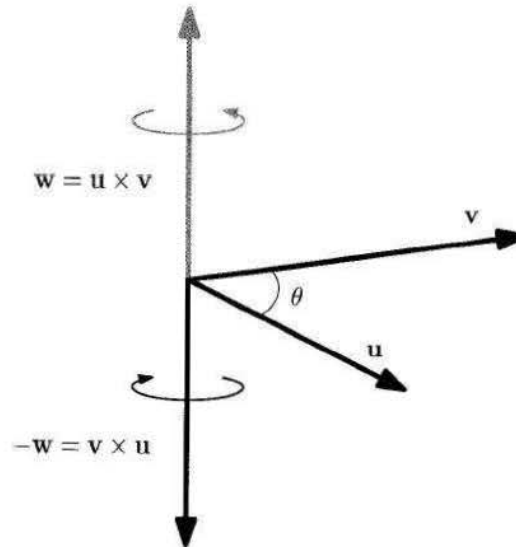


Figura 3.7 Representação gráfica esquemática da não-comutatividade do produto externo de dois vectores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$.

A operação de produto vectorial de dois vectores apresenta ainda as seguintes propriedades:

$$(\alpha \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\alpha \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v}), \quad (3.26)$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \quad (3.27)$$

e

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}. \quad (3.28)$$

De acordo com as definições de produto interno e de produto externo, as condições de perpendicularidade e de paralelismo de dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não-nulos correspondem a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, respectivamente.

Por fim, antes de prosseguir para uma introdução aos fundamentos da álgebra tensorial procede-se, no contexto da álgebra vectorial, a uma abordagem mais detalhada de algumas propriedades da notação indicial. Assim, considere-se, por exemplo, a expressão 3.2. Em termos da notação indicial, o vector $\mathbf{u}$ pode ser representado por

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i. \quad (3.29)$$

De acordo com a convenção de Einstein, a existência de um índice repetido — apenas uma vez — numa parcela representada em notação indicial indica a existência de um somatório em toda a gama de variação do referido índice. Este tipo de índice é denominado “mudo”, visto a sua substituição numa parcela por um índice distinto, que não exista previamente nessa parcela, não alterar o valor associado ao somatório. Consequentemente, com base na convenção de Einstein, a notação indicial para o vector $\mathbf{u}$ corresponde a

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i. \quad (3.30)$$

O índice i aparece duas vezes na parcela que define o segundo membro da expressão 3.30, pelo que corresponde a um índice mudo. Nos pontos que se seguem apresentam-se algumas regras em que se baseia a notação indicial. Apresentam-se também exemplos concretos para cada uma das regras apresentadas.

- O valor máximo de um índice mudo indica o número de parcelas associado ao somatório da respectiva parcela. Exemplo: a expressão $u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ é constituída por um somatório com três parcelas ($\max(i) = 3$ parcelas).
- Um índice mudo não figura necessariamente em todas as parcelas que constituem os dois membros de uma equação. Exemplo: na expressão $\|\mathbf{u}\|^2 = u_k u_k$ o índice mudo k só aparece no segundo membro da equação.
- Um índice que apareça uma única vez numa parcela é denominado índice livre. Este tipo de índice designa, para cada um dos valores da sua gama de variação, uma equação ou um dado elemento pertencente a um conjunto. Neste contexto, o produto dos valores máximos dos índices livres numa parcela permite determinar o número de equações representadas ou de elementos existentes num conjunto. Exemplo: v_n representa as $\max(n) = 3$ componentes

do vector $\mathbf{v}$ e S_{kl} representa as $\max(k) \times \max(l) = 3^2$ componentes do tensor de segunda ordem $\mathbf{S}$.

- Um determinado índice livre terá de aparecer obrigatoriamente uma única vez em todas as parcelas que constituem os dois membros de uma equação. Exemplo: $a_m = b_m + c_m$ representa as três componentes do vector $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ e $x_k = d_k + c_n d_n e_k$ representa as três componentes do vector $\mathbf{x} = \mathbf{d} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})\mathbf{e}$.
- Numa equação representada em notação indicial, um índice associado a uma determinada parcela ou é mudo ou é livre.
- Nenhum índice, mudo ou livre, poderá aparecer mais do que duas vezes numa mesma parcela.
- A existência de uma vírgula entre índices indica a derivada parcial relativamente à variável correspondente ao índice posterior à vírgula. Exemplo: $f_{i,j}$ representa as 3^2 derivadas parciais $\partial f_i / \partial x_j$ — i e j são índices livres — e $f_{k,k}$ (k é índice mudo) representa $1 = 3^0$ escalar constituído pelo somatório

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}.$$

3.3 Fundamentos de álgebra tensorial

Como foi anteriormente referido, o conceito de tensor consiste na generalização dos conceitos de escalar e de vector. Por um lado, um escalar é definido como sendo um tensor de ordem zero. Por outro lado, um tensor de primeira ordem corresponde a uma função linear que transforma cada vector num escalar. Assim, um tensor de primeira ordem consiste numa transformação linear que associa um escalar α a cada vector $\mathbf{v}$. Deste modo, um exemplo de tensor de primeira ordem consiste na função de operação — operador — $\eta = \mathbf{u} \cdot$ que ao vector $\mathbf{v}$ associa o seu produto interno com o vector $\mathbf{u}$, isto é,

$$\eta(\mathbf{v}) = \alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Atenda-se ao facto de o operador $\eta = \mathbf{u} \cdot$ corresponder a uma transformação linear, pois

$$\eta(\beta \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\beta \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}, \quad (3.31)$$

quaisquer que sejam os vectores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e o escalar β . Nesta perspectiva, a natureza linear da transformação $\mathbf{u} \cdot$ resulta no facto de qualquer vector $\mathbf{u}$ ser

associado, em conjunto com a operação de produto interno com outro vector, a um tensor de primeira ordem. Além disso, tem-se que qualquer tensor de primeira ordem pode ser representado por um vector.

De uma forma genérica, pode afirmar-se que um tensor de segunda ordem consiste numa transformação linear que associa um vector $\mathbf{v}$ a cada vector $\mathbf{u}$. Deste modo, um exemplo de tensor de segunda ordem consiste na função $\mathbf{u} \times$ que ao vector $\mathbf{v}$ associa o produto externo $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Atenda-se ao facto de a função $\mathbf{u} \times$ corresponder a uma transformação linear, pois

$$\mathbf{u} \times (\beta \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \beta \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}, \quad (3.32)$$

quaisquer que sejam os vectores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e o escalar β .

O produto tensorial de dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é a operação $\otimes$ que resulta no vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, tal que

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{q} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})\mathbf{u}, \quad (3.33)$$

qualquer que seja o vector $\mathbf{q}$. Assim, verifica-se que a função de operação $\mathbf{u} \otimes$ corresponde a uma transformação linear, pois

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot (\beta \mathbf{m} + \mathbf{n}) = \beta (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{m} + (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}, \quad (3.34)$$

quaisquer que sejam os vectores $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$, e o escalar β . Deste modo, a função $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot$ associa ao vector $\mathbf{q}$ o vector $\mathbf{c} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{q})\mathbf{u}$, paralelo a $\mathbf{u}$. Assim, tem-se que o produto tensorial $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ corresponde, em conjunto com a operação de produto interno com outro vector, a um tensor de segunda ordem. Atenda-se ao facto de o produto tensorial de dois vectores $\mathbf{R} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ corresponder, de acordo com a equação 3.30, a

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (u_i \mathbf{e}_i) \otimes (v_j \mathbf{e}_j) = (u_i v_j)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \quad (3.35)$$

Assim, as 3^2 componentes cartesianas de $\mathbf{R} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ são $R_{ij} = u_i v_j$, correspondendo as 3^2 componentes da base desse tensor a $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = R_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) &= R_{11}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + R_{12}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) + R_{13}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) \\ &\quad + R_{21}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + R_{22}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + R_{23}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) \\ &\quad + R_{31}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) + R_{32}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) + R_{33}(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Atenda-se ao facto de, em termos de notação, o símbolo da operação de produto tensorial poder ser omitido, sendo então o produto tensorial de dois vectores $\mathbf{u}$

e $\mathbf{v}$ representado, de modo equivalente, por

$$\mathbf{uv} = (u_i \mathbf{e}_i)(v_j \mathbf{e}_j) = (u_i v_j)(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j). \quad (3.37)$$

Em geral, um tensor de segunda ordem $\mathbf{T}$ corresponde a uma transformação linear que transforma o vector $\mathbf{u}$ no vector $\mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}$, tal que

$$\mathbf{T} \cdot (\beta \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \beta \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{w}, \quad (3.38)$$

quaisquer que sejam os vectores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e o escalar β .

Atendendo ao facto de as 3^1 componentes cartesianas de um tensor de primeira ordem (vector) $\mathbf{u}$ corresponderem, de acordo com a equação 3.30, a $u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i$, as 3^2 componentes cartesianas de um tensor de segunda ordem $\mathbf{T}$ correspondem a

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_j. \quad (3.39)$$

Assim, considerando dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tem-se que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = u_i T_{ij} v_j, \quad (3.40)$$

o que, de acordo com a equação 3.30, resulta em

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{v}. \quad (3.41)$$

Atendendo às equações 3.35 e 3.37, a equação anterior corresponde a

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{v}. \quad (3.42)$$

O facto de esta equação ter de ser verdadeira para quaisquer vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ obriga a que

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (3.43)$$

Nos parágrafos que se seguem apresentam-se, de forma genérica, algumas das principais definições e características associadas aos tensores de segunda ordem.

Dois tensores de segunda ordem $\mathbf{N}$ e $\mathbf{T}$ são iguais se as suas componentes correspondentes também o são, isto é,

$$\mathbf{N} = \mathbf{T} \Leftrightarrow N_{ij} = T_{ij}. \quad (3.44)$$

A transposta de um tensor de segunda ordem $\mathbf{V}$ é o tensor $\mathbf{N}$, também de segunda ordem, tal que

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}^T \Leftrightarrow N_{ij} = V_{ji}. \quad (3.45)$$

Um tensor de segunda ordem $\mathbf{V}$ diz-se simétrico se

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^T \Leftrightarrow V_{ij} = V_{ji}, \quad (3.46)$$

e anti-simétrico se

$$\mathbf{V} = -\mathbf{V}^T \Leftrightarrow V_{ij} = -V_{ji}. \quad (3.47)$$

O tensor nulo de segunda ordem $\mathbf{0}$ tem as 3^2 componentes cartesianas nulas, ou seja,

$$0_{ij} = 0. \quad (3.48)$$

As componentes do tensor identidade de segunda ordem $\mathbf{I}$ são definidas, de acordo com a equação 3.16, por

$$I_{ij} = \delta_{ij}. \quad (3.49)$$

Um tensor de segunda ordem $\mathbf{V}$ diz-se ortogonal se

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I} \Leftrightarrow V_{ij}V_{kj} = V_{ji}V_{jk} = \delta_{ik}. \quad (3.50)$$

O traço de um tensor de segunda ordem $\mathbf{V}$, designado por $\text{tr}(\mathbf{V})$, é o escalar V definido por

$$V = \text{tr}(\mathbf{V}) = V_{ii} = V_{11} + V_{22} + V_{33}. \quad (3.51)$$

Consequentemente, pode constatar-se que na determinação do traço de um tensor de segunda ordem os índices das componentes são iguais. Como foi referido anteriormente, este facto indicia a existência de uma soma no referido índice (índice mudo). Definindo contracção como o acto de igualar dois índices associados a componentes tensoriais, o produto interno de dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ associados às componentes u_i e v_j , respectivamente, é obtido pelo produto dessas componentes seguido da contracção dos seus índices, obtendo-se assim

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i.$$

Por outro lado, o produto interno de um tensor de segunda ordem $\mathbf{T}$ por um vector $\mathbf{u}$, isto é $\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}$, pode obter-se multiplicando as duas componentes T_{ij} e u_k e procedendo à contracção dos índices j e k , obtendo-se

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = T_{ij}u_j.$$

Assim, constata-se que a operação de produto interno corresponde à contração de dois índices, o que provoca a diminuição de uma unidade na ordem do tensor associado à ordem superior. No entanto, a determinação do traço de um tensor de segunda ordem envolve duas operações de contração, transformando assim um tensor de segunda ordem num de ordem 0, ou seja, num escalar. Neste contexto, a operação de dupla contração de dois tensores de segunda ordem $\mathbf{T}$ e $\mathbf{V}$ é representada por $\mathbf{T} : \mathbf{V}$. O traço do tensor de segunda ordem $\mathbf{V}$ pode ser determinado, de acordo com as equações 3.16 e 3.49, como

$$\text{tr}(\mathbf{V}) = \mathbf{I} : \mathbf{V} = \delta_{ij}V_{ij} = V_{ij}\delta_{ij} = \mathbf{V} : \mathbf{I} = V_{ii}. \quad (3.52)$$

Além disso, tem-se que

$$\mathbf{W} : \mathbf{V} = W_{ij}V_{ij} = \text{tr}(\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{V}) = \text{tr}(\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{W}) = V_{ij}W_{ij} = \mathbf{V} : \mathbf{W}. \quad (3.53)$$

Finalmente, refira-se que, em termos de adição, de multiplicação por escalares e de produto interno, os tensores de segunda ordem mantêm muitas das regras associadas à aritmética dos escalares, tais como, por exemplo:

$$\mathbf{T} + \mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{T}, \quad (3.54)$$

$$\alpha(\beta\mathbf{T}) = (\alpha\beta)\mathbf{T}, \quad (3.55)$$

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{V}) = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{V} \quad (3.56)$$

e

$$(\mathbf{T} + \mathbf{S}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}, \quad (3.57)$$

quaisquer que sejam os tensores de segunda ordem $\mathbf{T}$, $\mathbf{S}$ e $\mathbf{V}$, e os escalares α e β .

Os tensores de ordem superior à segunda podem ser definidos de modo análogo. Por exemplo, um tensor $\mathbf{S}$ de terceira ordem consiste numa transformação linear que associa um tensor de segunda ordem $\mathbf{T}$ a cada vector $\mathbf{u}$, tendo-se $\mathbf{S} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{T}$. Em termos das 3^3 componentes de $\mathbf{S}$ resultará, neste caso, que

$$\mathbf{S} = T_{ijk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k. \quad (3.58)$$

Um tensor de quarta ordem amplamente utilizado na mecânica dos sólidos para materiais lineares elásticos é o tensor de elasticidade $\mathbf{D}$. Este tensor relaciona os tensores de segunda ordem das tensões de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ e das deformações

ε através da denominada Lei de Hooke (generalizada), ou seja,

$$\sigma = \mathbf{D} : \varepsilon \quad (3.59)$$

ou, ainda,

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (3.60)$$

Na modelação numérica envolvendo fenómenos da mecânica dos meios contínuos é necessário proceder à manipulação algébrica de equações envolvendo tensores, que poderão porventura ser representadas por relações do tipo matricial. Neste contexto, são apresentados na Tabela 3.1 alguns exemplos da notação adoptada para expressões tensoriais em notação quer absoluta quer indicial e para as expressões matriciais correspondentes.

Tabela 3.1 Exemplos de equivalência entre expressões escritas nas notações tensorial absoluta, tensorial indicial e matricial.

Tensorial absoluta	Tensorial indicial	Matricial
$\alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	$\alpha = u_i v_i$	$\alpha = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$
$\mathbf{W} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$	$W_{ij} = u_i v_j$	$\mathbf{W} = \mathbf{u} \mathbf{v}^T$
$\mathbf{v} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{u}$	$v_i = W_{ij} u_j$	$\mathbf{v} = \mathbf{W} \mathbf{u}$
$\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{W}$	$v_j = u_i W_{ij}$	$\mathbf{v}^T = \mathbf{u}^T \mathbf{W}$
$\alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{v}$	$\alpha = u_i W_{ij} v_j$	$\alpha = \mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{v}$
$\mathbf{V} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{B}$	$V_{ij} = W_{ik} B_{kj}$	$\mathbf{V} = \mathbf{W} \mathbf{B}$
$\mathbf{V} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{B}^T$	$V_{ij} = W_{ik} B_{jk}$	$\mathbf{V} = \mathbf{W} \mathbf{B}^T$
$\mathbf{V} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}$	$V_{ij} = W_{ik} B_{kl} F_{lj}$	$\mathbf{V} = \mathbf{W} \mathbf{B} \mathbf{F}$
$\alpha = \mathbf{W} : \mathbf{V}$	$\alpha = W_{ij} V_{ij}$	$\alpha = \text{tr}(\mathbf{W}^T \mathbf{V})$

3.4 Notação de Voigt

Analisando a expressão 3.60, pode constatar-se que a lei de Hooke é definida por 3^2 equações, contendo cada um dos seus segundos membros 3^2 parcelas. No entanto, tomando em consideração o facto de os tensores das tensões de Cauchy σ e das deformações ε serem, de um modo geral, tensores (de segunda ordem) simétricos, tem-se que

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \end{cases} \quad (3.61)$$

ou, ainda,

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\ \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \end{cases} \quad (3.62)$$

Atendendo a estas propriedades de simetria, tem-se, respectivamente, que

$$\begin{cases} D_{ijkl} = D_{jikl} \\ D_{ijkl} = D_{ijlk} \end{cases} \quad (3.63)$$

pelo que das 3^4 componentes do tensor (de quarta ordem) de elasticidade $\mathbf{D}$ resultam independentes apenas 36. Neste contexto, a expressão 3.60 pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & D_{ij11}\varepsilon_{11} + D_{ij22}\varepsilon_{22} + D_{ij33}\varepsilon_{33} + D_{ij12}(2\varepsilon_{12}) \\ & + D_{ij13}(2\varepsilon_{13}) + D_{ij23}(2\varepsilon_{23}). \end{aligned} \quad (3.64)$$

De acordo com as propriedades de simetria, cada uma das grandezas tensoriais $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ passam a ser representadas por apenas 6 componentes independentes. Assim, procedendo de um modo puramente algébrico, é possível não só agrupar as componentes dos tensores $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ em dois vectores (matrizes colunas) de dimensão 6×1 mas também dispor as 36 componentes do tensor $\mathbf{D}$ numa matriz de dimensão 6×6 , pelo que a expressão 3.64 corresponde, neste contexto, a

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1113} & D_{1123} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2213} & D_{2223} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3312} & D_{3313} & D_{3323} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1212} & D_{1213} & D_{1223} \\ D_{1311} & D_{1322} & D_{1333} & D_{1312} & D_{1313} & D_{1323} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2312} & D_{2313} & D_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.65)$$

Realce-se o facto de a expressão anterior não corresponder a uma representação matricial (equivalente) da relação tensorial 3.64. Na realidade, esta expressão é apenas uma representação puramente algébrica adoptada para representar matricialmente uma relação entre grandezas tensoriais simétricas. $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ não correspondem a vectores (tensores de primeira ordem) com 6 componentes, mas sim a matrizes (tensores de segunda ordem) com 3^2 componentes. $\mathbf{D}$ também

não corresponde a uma matriz (tensor de segunda ordem) com 6^2 componentes, mas sim a uma hipermatriz (tensor de quarta ordem) com 3^4 componentes.

Para além das propriedades de simetria já referidas, é possível constatar-se que as componentes do tensor de elasticidade verificam, ainda, a propriedade

$$D_{ijkl} = D_{klij}, \quad (3.66)$$

pelo que, na realidade, das 3^4 componentes do tensor (de quarta ordem) de elasticidade $\mathbf{D}$ resultam independentes não 36, mas sim 21. Deste modo, a matriz da expressão 3.65 resulta simétrica. Neste contexto, definindo

$$\begin{cases} \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \end{cases} \quad (3.67)$$

e

$$\begin{cases} D_{11} = D_{1111} \\ D_{12} = D_{1122} \\ D_{13} = D_{1133} \\ D_{14} = D_{1112} \\ D_{15} = D_{1113} \\ D_{16} = D_{1123} \\ D_{22} = D_{2222} \end{cases}, \begin{cases} D_{23} = D_{2233} \\ D_{24} = D_{2212} \\ D_{25} = D_{2213} \\ D_{26} = D_{2223} \\ D_{33} = D_{3333} \\ D_{34} = D_{3312} \\ D_{35} = D_{3313} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} D_{36} = D_{3323} \\ D_{44} = D_{1212} \\ D_{45} = D_{1213} \\ D_{46} = D_{1223} \\ D_{55} = D_{1113} \\ D_{56} = D_{1123} \\ D_{66} = D_{1123} \end{cases}, \quad (3.68)$$

a expressão 3.65 corresponde, atendendo à relação de simetria 3.66, a

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{14} & D_{24} & D_{34} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{15} & D_{25} & D_{35} & D_{45} & D_{55} & D_{56} \\ D_{16} & D_{26} & D_{36} & D_{46} & D_{56} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}. \quad (3.69)$$

A relação anterior corresponde à expressão da Lei de Hooke em notação de Voigt, isto é,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.70)$$

em que, $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ são os vectores (matrizes colunas) dos campos de tensões e de deformações, respectivamente, e $\mathbf{D}$ a matriz (constitutiva) de elasticidade.

A notação de Voigt é usualmente utilizada na implementação numérica do método dos elementos finitos, visto permitir a simplificação da representação e da manipulação das entidades tensoriais intervenientes em problemas de, por exemplo, mecânica dos meios contínuos. Em termos gerais e de acordo com o exposto anteriormente, a principal vantagem da notação de Voigt prende-se com o facto de permitir a representação simplificada de tensores simétricos não só de segunda ordem — na forma de vectores (matrizes colunas) — mas também de quarta ordem — na forma de matrizes quadradas.

Por fim, refira-se que nos capítulos seguintes, para além das notações tensorial absoluta, tensorial indicial e matricial, usar-se-á também a notação (matricial) de Voigt para a representação simplificada de relações de natureza tensorial entre entidades associadas a fenómenos da mecânica dos meios contínuos, tais como, por exemplo, a elasticidade e a elastoplasticidade.

Em seguida apresenta-se uma lista de referências bibliográficas onde o leitor mais interessado poderá encontrar mais desenvolvimentos sobre os temas aqui descritos.

Referências Bibliográficas

1. Borisenko, A.I., Tarapov, I.E. *Vector and Tensor Analysis with Applications*, Dover Publications, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1979.
2. Bourne, D.E., Kendall, P.C. *Vector Analysis and Cartesian Tensors*, 3.^a edição, Chapman & Hall, Londres, Reino Unido, 1992.
3. Danielson, D.A. *Vectors and Tensors in Engineering and Physics*, 2.^a edição, Westview Press, Boulder, Estados Unidos da América, 2003.
4. Dias Agudo, F.R. *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Livraria Escolar Editora, Lisboa, Portugal, 1997.
5. Heinbockel, J.H. *Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics*, Trafford Publishing, Victória, Canadá, 2001.
6. Itskov, M. *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers — With Applications to Continuum Mechanics*, 2.^a edição, Springer-Verlag, Berlim, Alemanha, 2009.
7. Lebedev, L.P., Cloud, M.J. *Tensor Analysis*, World Scientific Publishing Co., Nova Jérsei, Estados Unidos da América, 2003.
8. Ruíz-Tolosa, J.R., Castillo, E. *From Vectors to Tensors*, Springer-Verlag, Berlim, Alemanha, 2005.
9. Simmonds, J.G. *A Brief on Tensor Analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, 2.^a edição, Springer-Verlag, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1997.
10. Spencer, A.J.M. *Continuum Mechanics*, Dover Books on Physics, Dover Publications, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2004.
11. Wrede, R.C. *Introduction to Vector and Tensor Analysis*, Dover Publications, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1972.

Resumo Neste capítulo apresenta-se uma abordagem introdutória aos princípios básicos do método dos elementos finitos. Para tal, descrevem-se procedimentos genéricos subjacentes ao método, tais como, por exemplo, a discretização, a construção dos sistemas de equações elementares, o procedimento de assemblagem, a introdução de condições de fronteira e de carregamentos exteriores, e, para terminar, a redução e a resolução do sistema de equações de um problema genérico. Estes procedimentos são apresentados de forma genérica ao longo do capítulo.

4.1 Introdução

Como foi referido nos capítulos anteriores, o método dos elementos finitos envolve um conjunto de metodologias e de técnicas matemáticas e numéricas com as quais é possível determinar soluções aproximadas para equações e sistemas de equações diferenciais parciais, bem como para equações integrais. Frequentemente, o modo como o MEF resolve estes sistemas de equações diferenciais parciais é transformando-os em sistemas de equações diferenciais ordinárias. Estas podem então ser integradas numericamente recorrendo a métodos convencionais, tais como, por exemplo, os métodos de Runge-Kutta ou de Gauss-Legendre.

Neste capítulo apresenta-se uma abordagem genérica à resolução de um problema de engenharia pelo método dos elementos finitos, a partir da qual será possível construir o sistema de equações que descreve o comportamento do sistema a estudar.

4.2 Abordagem de engenharia

Nos parágrafos seguintes são descritos os procedimentos genéricos com os quais se pode analisar um sistema recorrendo ao método dos elementos finitos. Exemplificam-se e descrevem-se ainda as etapas globais associadas ao método dos elementos finitos, recorrendo, para tal, a um exemplo concreto.

4.2.1 Generalização e definição do modelo

Para melhor ilustrar aquelas que são as ideias-base do método dos elementos finitos considere-se um qualquer problema de engenharia. Para simplificar a análise sem, no entanto, perder generalidade, considere-se ainda que este problema é bidimensional e que o domínio que se vai analisar tem um comportamento linear. No problema proposto, pretende-se determinar a resposta da parede de uma barragem para geração de energia eléctrica quando submetida ao efeito da pressão hidráulica na face da albufeira. Este caso concreto serve de pretexto para a definição de uma estratégia global e genérica, passível de ser aplicada à resolução de outros problemas de engenharia recorrendo ao método dos elementos finitos.

4.2.2 Discretização do modelo

Nas Figuras 4.1(a) e (b) mostra-se uma imagem de uma barragem para geração de energia eléctrica e o modelo geométrico tridimensional da mesma barragem, respectivamente. Nas Figuras 4.1(c) e (d) mostra-se o problema real tridimensional simplificado discretizado em elementos finitos e uma representação simplificada do modelo bidimensional de uma secção da barragem, respectivamente. Nesta última imagem (Figura 4.1(d)) apresenta-se ainda o conjunto de forças e de deslocamentos prescritos aplicados em partes da sua fronteira. Este modelo pode ser então dividido num conjunto finito de elementos. Na Figura 4.1(d) mostra-se uma discretização hipotética do referido modelo bidimensional.

Considere-se agora um só elemento da discretização, representado e sombreado na Figura 4.1(d), designado por elemento e e representado isoladamente na Figura 4.2. Designem-se os seus nós por i , j e k . Este elemento conecta-se com os elementos que lhe são adjacentes através de um conjunto de forças aplicadas nos seus nós. No nó i , por exemplo, a força $\mathbf{f}_i^e$ tem duas componentes paralelas

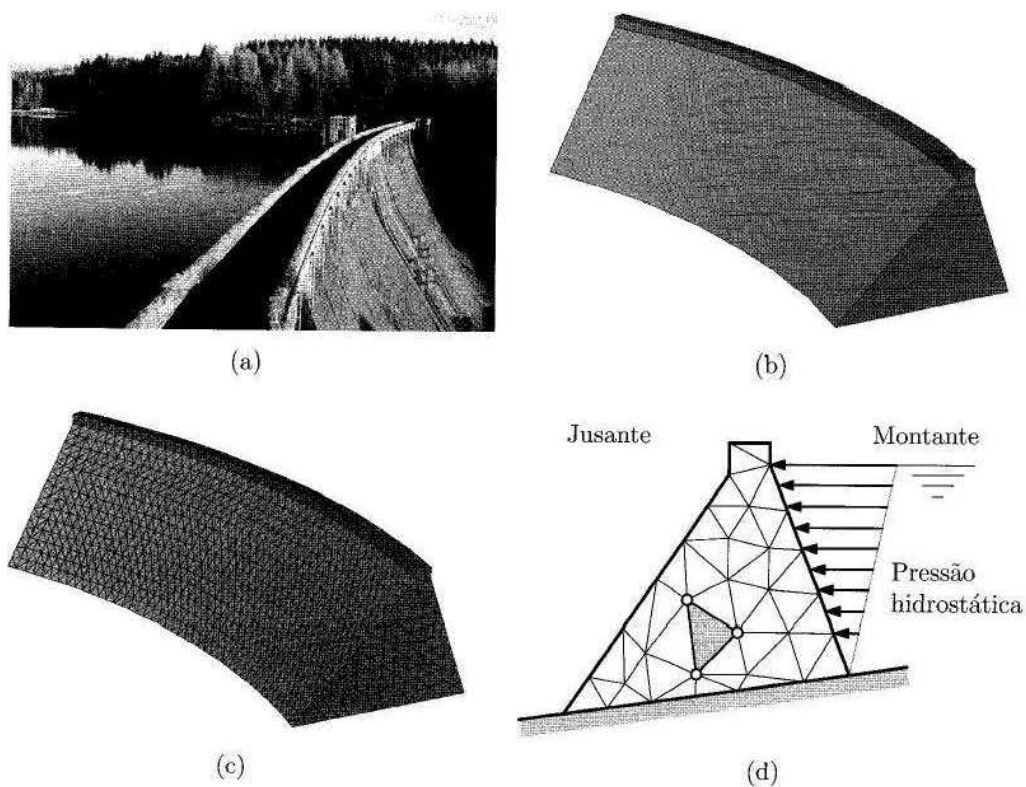


Figura 4.1 Barragem de Loch Laggan (Escócia), para geração de energia eléctrica: (a) fotografia da barragem, (b) modelo geométrico tridimensional simplificado, (c) problema real tridimensional simplificado, discretizado em elementos finitos e (d) representação simplificada do modelo bidimensional discretizado de uma secção da barragem (ver anexo a cores).

aos eixos Ox e Oy , designadas por U_i^e e V_i^e , respectivamente. Então, o vector das forças no nó i pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_i^e = \begin{Bmatrix} U_i^e \\ V_i^e \end{Bmatrix}. \quad (4.1)$$

O conjunto de todas as seis componentes de força do elemento e representado na Figura 4.2 designa-se por $\mathbf{f}^e$, ou seja,

$$\mathbf{f}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i^e \\ \mathbf{f}_j^e \\ \mathbf{f}_k^e \end{Bmatrix}, \quad (4.2)$$

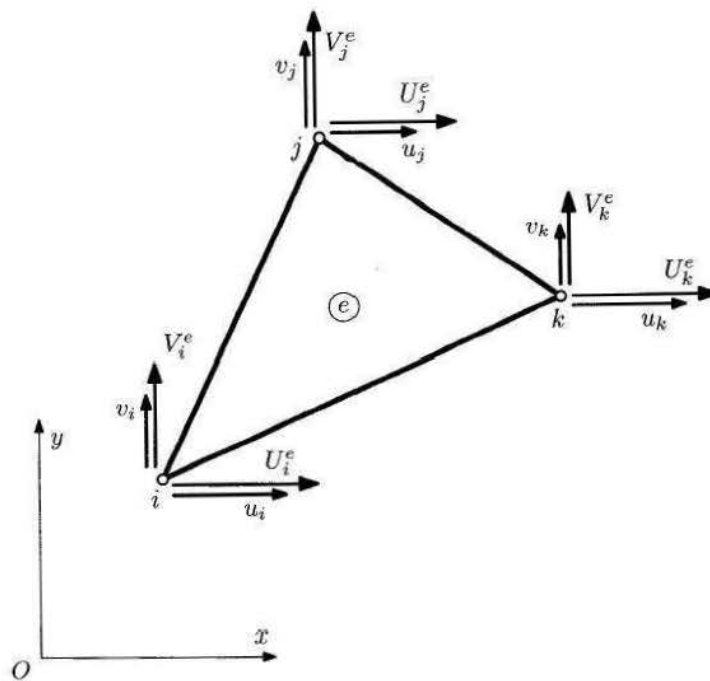


Figura 4.2 Elemento finito genérico e , com representação das componentes de força e de deslocamento nodais.

em que

$$\mathbf{f}_i^e = \begin{Bmatrix} U_i^e \\ V_i^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_j^e = \begin{Bmatrix} U_j^e \\ V_j^e \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_k^e = \begin{Bmatrix} U_k^e \\ V_k^e \end{Bmatrix}. \quad (4.3)$$

Deste modo, o vector de forças nodais do elemento finito é

$$\mathbf{f}^e = \begin{Bmatrix} U_i^e \\ V_i^e \\ U_j^e \\ V_j^e \\ U_k^e \\ V_k^e \end{Bmatrix} = [U_i^e \ V_i^e \ U_j^e \ V_j^e \ U_k^e \ V_k^e]^T. \quad (4.4)$$

Analogamente, o deslocamento de cada nó do elemento tem duas componentes, designadas por u e v , sendo a componente de deslocamento paralela ao eixo Ox do nó i denotada por u_i e a componente paralela ao eixo Oy desig-

nada por v_i . Deste modo, o vector dos deslocamentos nodais para o elemento e representado na Figura 4.2 é

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_k \end{Bmatrix}, \quad (4.5)$$

em que

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_j = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_k = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \end{Bmatrix}. \quad (4.6)$$

Assim, o vector de deslocamentos nodais do elemento finito é

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_k \quad v_k]^T. \quad (4.7)$$

O elemento finito apresentado tem, portanto, seis componentes de deslocamento que deverão ser calculadas para conhecer a posição e a forma do elemento depois de aplicadas as cargas. Estas componentes de deslocamento são os graus de liberdade do elemento. Consequentemente, diz-se que este elemento finito tem três nós e seis graus de liberdade.

4.2.3 Equações de equilíbrio

Assumindo, como hipótese, que o material de que é construída a barragem é homogéneo e tem um comportamento linear elástico, as forças nodais dependem de forma directa e proporcional dos deslocamentos dos nós associados ao desenvolvimento de deformações no elemento.

Naturalmente, se todos os nós se deslocarem de modo idêntico, isto é, segundo um mesmo vector de deslocamento, então o elemento fica unicamente animado de um movimento de translação sem deformação, isto é, de corpo rígido, resultando um vector de forças nulo. De igual modo, se o movimento se resumir a um movimento de corpo rígido de rotação pura em torno de um determinado eixo, ou seja, sem deformação, o vector de forças resulta igualmente nulo. No entanto, de momento interessa unicamente verificar que o vector de forças no-

dais se encontra, de algum modo, relacionado com os deslocamentos nodais. Esta relação, que se assume ser de proporcionalidade directa, pode ser expressa através da seguinte equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}, \quad (4.8)$$

ou ainda, de forma mais compacta,

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e. \quad (4.9)$$

A matriz $\mathbf{k}^e$ representada na equação 4.8, que para o exemplo referido tem dimensão (6×6) , designa-se por matriz de rigidez elementar do elemento e . Esta designação surge da analogia com um sistema vibratório massa-mola, em que existe proporcionalidade directa entre a força exercida e o deslocamento resultante, na forma $F = k\Delta$, sendo k designado por constante de rigidez da mola.

Realizando uma análise nó a nó, esta matriz de rigidez pode ser vista como sendo constituída por um conjunto de nove submatrizes de dimensão (2×2) , cada uma referente à relação entre força e deslocamento entre cada par de nós. Assim, $\mathbf{k}^e$ pode ser reescrita de forma simplificada do seguinte modo:

$$\mathbf{f}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i^e \\ \mathbf{f}_j^e \\ \mathbf{f}_k^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ij} & \mathbf{k}_{ik} \\ \mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj} & \mathbf{k}_{jk} \\ \mathbf{k}_{ki} & \mathbf{k}_{kj} & \mathbf{k}_{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_k \end{Bmatrix}, \quad (4.10)$$

em que

$$\mathbf{k}_{ii} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{ij} = \begin{bmatrix} k_{13} & k_{14} \\ k_{23} & k_{24} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{k}_{kk} = \begin{bmatrix} k_{55} & k_{56} \\ k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Deste modo, pode determinar-se qualquer um dos vectores de forças nodais reescrevendo cada uma das equações da relação matricial 4.10, ou seja,

$$\begin{cases} \mathbf{f}_i^e = \mathbf{k}_{ii}\mathbf{a}_i + \mathbf{k}_{ij}\mathbf{a}_j + \mathbf{k}_{ik}\mathbf{a}_k \\ \mathbf{f}_j^e = \mathbf{k}_{ji}\mathbf{a}_i + \mathbf{k}_{jj}\mathbf{a}_j + \mathbf{k}_{jk}\mathbf{a}_k \\ \mathbf{f}_k^e = \mathbf{k}_{ki}\mathbf{a}_i + \mathbf{k}_{kj}\mathbf{a}_j + \mathbf{k}_{kk}\mathbf{a}_k \end{cases} \quad (4.12)$$

4.2.4 Assemblagem

Uma vez determinadas todas as matrizes de rigidez elementares para o problema em estudo, torna-se necessário agregá-las de forma a construir a matriz de rigidez de todo o problema. Esta operação é frequentemente designada por *assemblagem* (ou agrupamento), termo derivado da designação correspondente em língua inglesa *assembly*. Com a operação de assemblagem constrói-se a matriz de rigidez global para todo o domínio do problema. Note-se que na essência desta operação está o facto de que uma qualquer força externa aplicada num determinado nó do problema é partilhada por todos os elementos que têm esse mesmo nó em comum, como se pode analisar na representação esquemática da Figura 4.3.

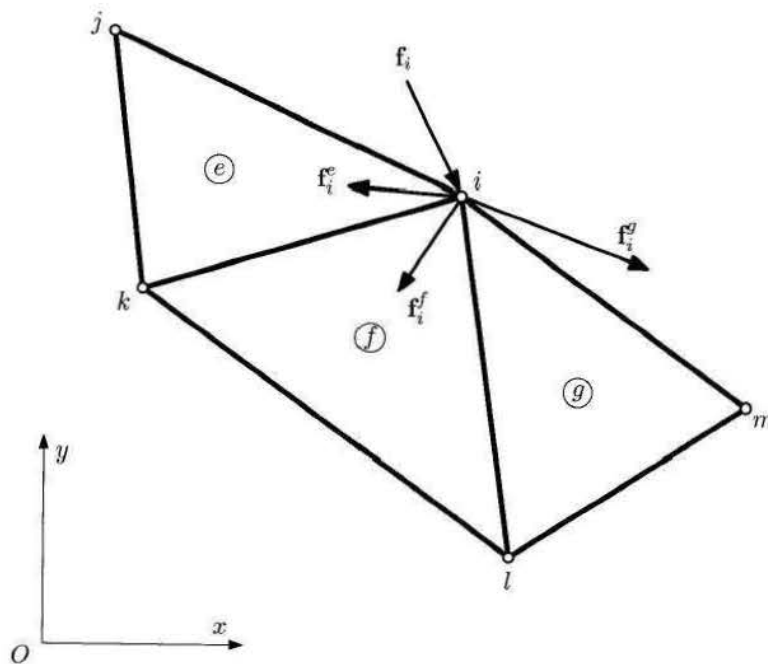


Figura 4.3 Contribuição de cada elemento para a força aplicada num nó comum a três elementos finitos.

A força exterior aplicada no nó i , designada por $\mathbf{f}_i$, dá origem a um conjunto de forças nodais internas $\mathbf{f}_i^e$, $\mathbf{f}_i^f$ e $\mathbf{f}_i^g$ que actuam nos elementos e , f e g , respectivamente. Assumindo que existe equilíbrio estático de toda a estrutura, ou seja, também de todos os pontos, pode afirmar-se que

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^e + \mathbf{f}_i^f + \mathbf{f}_i^g. \quad (4.13)$$

Considere-se a malha de elementos finitos simples representada na Figura 4.4, constituída por três elementos triangulares planos, e com um total de cinco nós e dez graus de liberdade. A análise pormenorizada desta malha de elementos finitos revela que a matriz de rigidez elementar para o elemento e é a seguinte:

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^e & \mathbf{k}_{12}^e & \mathbf{k}_{13}^e \\ \mathbf{k}_{21}^e & \mathbf{k}_{22}^e & \mathbf{k}_{23}^e \\ \mathbf{k}_{31}^e & \mathbf{k}_{32}^e & \mathbf{k}_{33}^e \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Analogamente, as matrizes de rigidez elementares dos elementos f e g são

$$\mathbf{k}^f = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^f & \mathbf{k}_{13}^f & \mathbf{k}_{14}^f \\ \mathbf{k}_{31}^f & \mathbf{k}_{33}^f & \mathbf{k}_{34}^f \\ \mathbf{k}_{41}^f & \mathbf{k}_{43}^f & \mathbf{k}_{44}^f \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

e

$$\mathbf{k}^g = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^g & \mathbf{k}_{14}^g & \mathbf{k}_{15}^g \\ \mathbf{k}_{41}^g & \mathbf{k}_{44}^g & \mathbf{k}_{45}^g \\ \mathbf{k}_{51}^g & \mathbf{k}_{54}^g & \mathbf{k}_{55}^g \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

respectivamente. A numeração das submatrizes de rigidez nas equações 4.14 a 4.16 está associada à numeração global indicada na Figura 4.4.

Uma vez construídas as matrizes de rigidez elementares procede-se à sua assemblagem. Esta operação é levada a cabo construindo uma matriz quadrada com dimensão correspondente ao número total de graus de liberdade do problema. Posteriormente, posicionam-se as matrizes elementares nas posições globais correspondentes aos respectivos graus de liberdade. Nas posições correspondentes aos graus de liberdade comuns a mais do que um elemento adicionam-se os elementos das respectivas matrizes. No que se segue utiliza-se o exemplo referido nos parágrafos anteriores para ilustrar o procedimento de assemblagem.

Assumindo que se pretende determinar os deslocamentos dos nós, o problema bidimensional exemplificado na Figura 4.4 tem dez graus de liberdade. Assim,

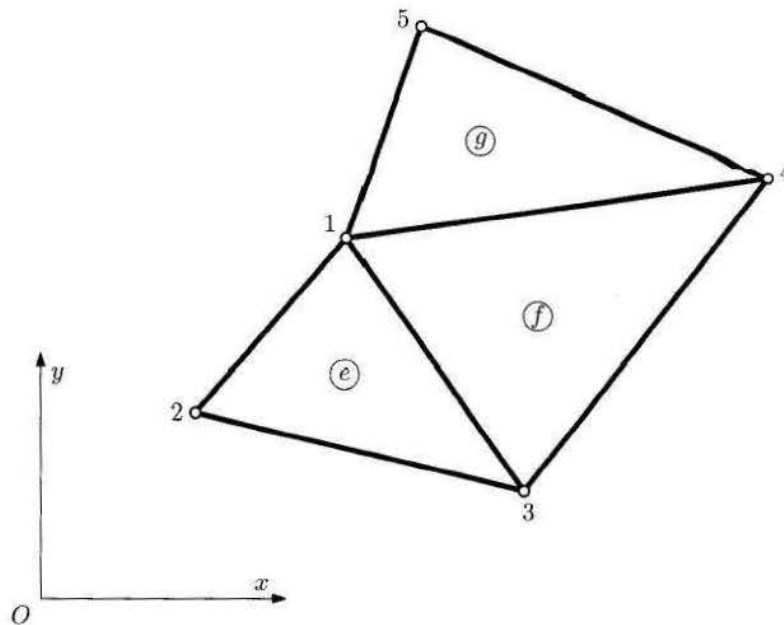


Figura 4.4 Malha de elementos finitos constituída por três elementos finitos triangulares planos, com cinco nós e dez graus de liberdade.

a matriz de rigidez global terá dimensão (10×10) . Esta matriz global será constituída por três matrizes elementares, uma por cada elemento do problema, indicadas nas relações 4.14 a 4.16.

O passo seguinte é definir a conectividade da malha de elementos finitos, isto é, a relação entre a numeração dos elementos finitos e a numeração dos graus de liberdade que lhes correspondem.

Para o caso apresentado, a conectividade da malha é a que se indica na Tabela 4.1. A matriz elemental $\mathbf{k}^e$ (equação 4.14) diz respeito às primeiras seis linhas na matriz de rigidez global $\mathbf{K}$. Adoptando a notação de submatrizes, o posicionamento da matriz elemental $\mathbf{k}^e$ resulta da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^e & \mathbf{k}_{12}^e & \mathbf{k}_{13}^e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{21}^e & \mathbf{k}_{22}^e & \mathbf{k}_{23}^e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{31}^e & \mathbf{k}_{32}^e & \mathbf{k}_{33}^e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

em que $\mathbf{0}$ é uma matriz de zeros de dimensão (2×2) .

Tabela 4.1 Conectividade da malha de elementos finitos do exemplo da Figura 4.4 e correspondência com as linhas da matriz de rigidez global.

Elemento	Nós	Graus de liberdade	Linhas de K
<i>e</i>	1, 2, 3	$u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$	1, 2, 3, 4, 5, 6
<i>f</i>	1, 3, 4	$u_1, v_1, u_3, v_3, u_4, v_4$	1, 2, 5, 6, 7, 8
<i>g</i>	1, 4, 5	$u_1, v_1, u_4, v_4, u_5, v_5$	1, 2, 7, 8, 9, 10

No passo seguinte acrescenta-se a matriz elementar $\mathbf{k}^f$ (equação 4.15) à matriz de rigidez global. Uma vez que o efeito das forças é aditivo, somam-se os elementos comuns, resultando

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^e + \mathbf{k}_{11}^f & \mathbf{k}_{12}^e & \mathbf{k}_{13}^e + \mathbf{k}_{13}^f & \mathbf{k}_{14}^f & 0 \\ \mathbf{k}_{21}^e & \mathbf{k}_{22}^e & \mathbf{k}_{23}^e & 0 & 0 \\ \mathbf{k}_{31}^e + \mathbf{k}_{31}^f & \mathbf{k}_{32}^e & \mathbf{k}_{33}^e + \mathbf{k}_{33}^f & \mathbf{k}_{34}^f & 0 \\ \mathbf{k}_{41}^f & 0 & \mathbf{k}_{43}^f & \mathbf{k}_{44}^f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Para facilitar a compreensão do procedimento de montagem, os elementos da matriz $\mathbf{k}^e$ foram deixados a cor cinza. Para terminar a construção da matriz de rigidez global acrescenta-se a matriz elementar $\mathbf{k}^g$ (equação 4.16). Mais uma vez, somam-se os elementos comuns, resultando

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^e + \mathbf{k}_{11}^f + \mathbf{k}_{11}^g & \mathbf{k}_{12}^e & \mathbf{k}_{13}^e + \mathbf{k}_{13}^f & \mathbf{k}_{14}^f + \mathbf{k}_{14}^g & \mathbf{k}_{15}^g \\ \mathbf{k}_{21}^e & \mathbf{k}_{22}^e & \mathbf{k}_{23}^e & 0 & 0 \\ \mathbf{k}_{31}^e + \mathbf{k}_{31}^f & \mathbf{k}_{32}^e & \mathbf{k}_{33}^e + \mathbf{k}_{33}^f & \mathbf{k}_{34}^f & 0 \\ \mathbf{k}_{41}^f + \mathbf{k}_{41}^g & 0 & \mathbf{k}_{43}^f & \mathbf{k}_{44}^f + \mathbf{k}_{44}^g & \mathbf{k}_{45}^g \\ \mathbf{k}_{51}^g & 0 & 0 & \mathbf{k}_{54}^g & \mathbf{k}_{55}^g \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

A matriz de rigidez resultante para o problema da Figura 4.4 é então

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^e + \mathbf{k}_{11}^f + \mathbf{k}_{11}^g & \mathbf{k}_{12}^e & \mathbf{k}_{13}^e + \mathbf{k}_{13}^f & \mathbf{k}_{14}^f + \mathbf{k}_{14}^g & \mathbf{k}_{15}^g \\ \mathbf{k}_{21}^e & \mathbf{k}_{22}^e & \mathbf{k}_{23}^e & 0 & 0 \\ \mathbf{k}_{31}^e + \mathbf{k}_{31}^f & \mathbf{k}_{32}^e & \mathbf{k}_{33}^e + \mathbf{k}_{33}^f & \mathbf{k}_{34}^f & 0 \\ \mathbf{k}_{41}^f + \mathbf{k}_{41}^g & 0 & \mathbf{k}_{43}^f & \mathbf{k}_{44}^f + \mathbf{k}_{44}^g & \mathbf{k}_{45}^g \\ \mathbf{k}_{51}^g & 0 & 0 & \mathbf{k}_{54}^g & \mathbf{k}_{55}^g \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

O mesmo raciocínio que foi aplicado na montagem da matriz de rigidez global deve também ser aplicado na construção do vector das forças nodais da estrutura. Consequentemente, este vector é

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{f}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^e + \mathbf{f}_1^f + \mathbf{f}_1^g \\ \mathbf{f}_2^e \\ \mathbf{f}_3^e + \mathbf{f}_3^f \\ \mathbf{f}_4^f + \mathbf{f}_4^g \\ \mathbf{f}_5^g \end{Bmatrix}. \quad (4.21)$$

Finalmente, o sistema global de equações é dado pela relação matricial $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$, que pode ser escrita de forma estendida como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^e + \mathbf{k}_{11}^f + \mathbf{k}_{11}^g & \mathbf{k}_{12}^e & \mathbf{k}_{13}^e + \mathbf{k}_{13}^f & \mathbf{k}_{14}^f + \mathbf{k}_{14}^g & \mathbf{k}_{15}^g \\ & \mathbf{k}_{21}^e & \mathbf{k}_{22}^e & \mathbf{k}_{23}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{31}^e + \mathbf{k}_{31}^f & \mathbf{k}_{32}^e & \mathbf{k}_{33}^e + \mathbf{k}_{33}^f & \mathbf{k}_{34}^f & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{41}^f + \mathbf{k}_{41}^g & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{43}^f & \mathbf{k}_{44}^f + \mathbf{k}_{44}^g & \mathbf{k}_{45}^g \\ & \mathbf{k}_{51}^g & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{54}^g + \mathbf{k}_{55}^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{f}_5 \end{Bmatrix}. \quad (4.22)$$

O sistema de equações 4.22 representa todas as relações entre forças e deslocamentos para o problema genérico representado na Figura 4.4.

De acordo com o que foi descrito nos parágrafos anteriores, depois de realizada a montagem das matrizes de rigidez elementares obtém-se a representação física do comportamento de uma estrutura na forma do sistema global de equações. Este sistema de n equações (em que n é o número total de graus de liberdade do problema) pode ser descrito de forma genérica como

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1(n-1)} & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2(n-1)} & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{(n-1)1} & k_{(n-1)2} & \dots & k_{(n-1)(n-1)} & k_{(n-1)n} \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{n(n-1)} & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{Bmatrix}, \quad (4.23)$$

em que u_i (com $i = 1, \dots, n$) são os graus de liberdade do problema e

$$f_i = \sum_{e=1}^{N_e} \delta_{ei} F_i^e \quad (4.24)$$

é a resultante das acções exteriores no grau de liberdade i (com $i = 1, \dots, n$), sendo N_e o número total de elementos finitos do problema, F_i^e a componente de força nodal interna correspondente ao grau de liberdade i e associada ao elemento e , e

$$\delta_{ei} = \begin{cases} 1 & \text{se o grau de liberdade } i \text{ pertence ao elemento } e \\ 0 & \text{se o grau de liberdade } i \text{ não pertence ao elemento } e \end{cases}$$

4.2.5 Condições de fronteira e carregamentos

Considere-se, a título de exemplo e sem perda de generalidade, que os graus de liberdade do problema são as componentes de deslocamentos dos nós de uma determinada estrutura sujeita a um conjunto de esforços exteriores. Neste caso, o sistema de equações 4.23 representa todas as relações entre forças e deslocamentos para um problema genérico, tal como o representado na Figura 4.4. Porém, na forma apresentada, este sistema de equações não considera os apoios e fixações do problema — as condições de fronteira — nem as condições particulares de carregamento.

Atendendo a que os graus de liberdade do sistema são as componentes de deslocamento dos nós da estrutura, esta encontrar-se-á sujeita a esforços exteriores predefinidos que formam o vector $\mathbf{f}$ na equação 4.23. Uma análise atenta desta relação revela que a matriz de rigidez é singular, o que advém do facto de não se ter considerado quaisquer pontos de fixação para a estrutura. Consequentemente, o sistema poderá ficar sujeito a movimentos de corpo rígido. Todavia, a não-singularidade da matriz $\mathbf{K}$ exclui logo à partida a existência de uma solução única para a relação 4.23. Dependendo da natureza do vector $\mathbf{f}$, o sistema de equações deverá ser ou impossível ou indeterminado. De facto, no caso do vector $\mathbf{f}$ não corresponder a uma situação de equilíbrio estático da estrutura, o sistema resulta impossível, o que significa que, sob o efeito deste carregamento, a estrutura não verifica a hipótese inicial de equilíbrio estático, sendo a sua aceleração resultante não-nula. Por outro lado, no caso de $\mathbf{f}$ corresponder a uma situação de equilíbrio estático, o sistema resulta indeterminado, isto é, poderá ocorrer movimento de corpo rígido. Neste sentido, a condição de não existir movimento de corpo rígido para a relação 4.23, definida neste caso por

$$u_i = 0, \quad \forall i=1, \dots, n,$$

e que corresponde à solução trivial do sistema de equações, só se verifica quando o vector de forças for nulo, ou seja, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Deste modo, atendendo a que a relação 4.24 corresponde à exigência de que $\mathbf{f}$ verifique as condições de equilíbrio estático da estrutura, o sistema resulta necessariamente indeterminado. Todavia, a exclusão da possibilidade de movimento de corpo rígido (sistema indeterminado com $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$) redundará na solução trivial, em que não há movimentação da estrutura devido ao facto de esta não se encontrar sujeita a quaisquer esforços externos, o que, em termos de engenharia, é uma situação irrelevante.

Neste contexto, para que o sistema de equações 4.23 tenha uma solução (admissível) não-trivial é necessário definir deslocamentos prescritos correspondentes à fixação da estrutura, resultando a consequente impossibilidade do movimento de corpo rígido. Deste modo, obter-se-á um novo sistema global de equações — o sistema reduzido —, cuja matriz de rigidez é não-singular, permitindo assim a obtenção da referida solução não-trivial.

Deste modo, considerem-se, por exemplo, as condições de fronteira genéricas definidas por

$$\begin{cases} u_i = 0 \\ u_j = 0 \end{cases}$$

O sistema global de equações 4.23 pode ser então escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{j1} & k_{j2} & \dots & k_{ji} & \dots & k_{jj} & \dots & k_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i = 0 \\ \vdots \\ u_j = 0 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

Com as condições de fronteira indicadas, todos os termos k_{mi} e k_{mj} , $\forall m=1, \dots, n$, da matriz de rigidez global podem tomar qualquer valor. Assim, as colunas i e j da matriz global podem ser retiradas, juntamente com as respectivas equações — as linhas i e j . Obtém-se, deste modo, o sistema de equações reduzido, cuja matriz de rigidez, de dimensão $[(n-2) \times (n-2)]$ e que se designa por $\mathbf{K}'$, é dada por

$$\begin{bmatrix}
 k_{11} & \dots & k_{1(i-1)} & k_{1(i+1)} & \dots & k_{1(j-1)} & k_{1(j+1)} & \dots & k_{1n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 k_{(i-1)1} & \dots & k_{(i-1)(i-1)} & k_{(i-1)(i+1)} & \dots & k_{(i-1)(j-1)} & k_{(i-1)(j+1)} & \dots & k_{(i-1)n} \\
 k_{(i+1)1} & \dots & k_{(i+1)(i-1)} & k_{(i+1)(i+1)} & \dots & k_{(i+1)(j-1)} & k_{(i+1)(j+1)} & \dots & k_{(i+1)n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 k_{(j-1)1} & \dots & k_{(j-1)(i-1)} & k_{(j-1)(i+1)} & \dots & k_{(j-1)(j-1)} & k_{(j-1)(j+1)} & \dots & k_{(j-1)n} \\
 k_{(j+1)1} & \dots & k_{(j+1)(i-1)} & k_{(j+1)(i+1)} & \dots & k_{(j+1)(j-1)} & k_{(j+1)(j+1)} & \dots & k_{(j+1)n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 k_{n1} & \dots & k_{n(i-1)} & k_{n(i+1)} & \dots & k_{n(j-1)} & k_{n(j+1)} & \dots & k_{nn}
 \end{bmatrix}$$

Esta matriz de rigidez já não é singular e pode ser invertida para resolver o sistema reduzido de equações do problema em função dos graus de liberdade globais da estrutura. Alternativamente, pode utilizar-se um qualquer outro método de resolução de sistemas de equações lineares para determinar os graus de liberdade desconhecidos.

Os vectores reduzidos dos graus de liberdade e das acções exteriores são

$$\mathbf{a}' = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_{j-1} \\ u_{j+1} \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}' = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{i-1} \\ f_{i+1} \\ \vdots \\ f_{j-1} \\ f_{j+1} \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}, \quad (4.26)$$

respectivamente.

Refira-se que na definição dos deslocamentos prescritos para os graus de liberdade i e j se poderia ter considerado valores não-nulos para u_i e u_j . Neste caso, continua a ser possível determinar a matriz de rigidez reduzida $\mathbf{K}'$. Porém, tal envolve a utilização de procedimentos algébricos específicos que não se enquadram no âmbito deste livro, mas que podem ser consultados nas referências bibliográficas indicadas no final deste capítulo.

Por fim, refira-se que numa situação geral as incógnitas de um problema podem estar associadas a graus de liberdade de deslocamento ou de força. Neste caso, ambos os vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{f}$ terão incógnitas. No entanto, um dado grau de liberdade só poderá ter a correspondente incógnita associada ou a $\mathbf{u}$ ou a $\mathbf{f}$. No exercício seguinte abordam-se alguns destes pontos.

Exercício 4.1. Para exemplificar o procedimento de inclusão do efeito das condições de fronteira e dos carregamentos no sistema global de equações, considere-se o problema genérico bidimensional representado na Figura 4.5, constituído por dois elementos finitos lineares de dois nós e um elemento triangular de três nós. Determine o sistema de equações reduzido com o qual se podem calcular os deslocamentos dos nós da estrutura.

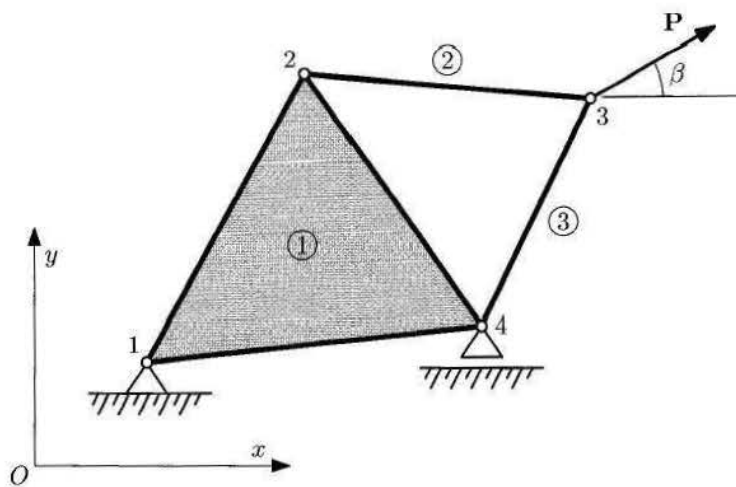


Figura 4.5 Malha de elementos finitos constituída por um elemento finito triangular e dois lineares, com quatro nós e oito graus de liberdade.

Resolução

Este sistema bidimensional tem oito graus de liberdade, que são as componentes de deslocamento horizontal e vertical dos nós. Assim, o sistema global de equações terá a forma genérica $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$ ou, de forma extensa,

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{Bmatrix},$$

em que a resultante das forças exteriores no grau de liberdade i — f_i — é dada pela relação 4.24. Tomando o sistema global de equações em consideração e conhecendo os deslocamentos nodais $\mathbf{a}$, torna-se possível determinar o vector das forças nodais $\mathbf{f}$. No entanto, o problema inverso é bastante mais comum, ou seja, determinar o vector dos deslocamentos nodais resultantes conhecendo os carregamentos exteriores que são aplicados ao sistema.

Numa primeira aproximação, seria possível determinar tal solução invertendo a matriz de rigidez $\mathbf{K}$. Porém, esta matriz, na forma que foi apresentada no sistema global de equações, é singular, ou seja, não tem matriz inversa, porque o modelo não se encontra apoiado. Em termos físicos isto significa que, para qualquer conjunto de forças exteriores aplicadas, o sistema pode sempre responder com um movimento de corpo rígido, ou seja, existe um número infinito de soluções para o sistema global de equações. Assim, de modo a que o problema possa ter uma solução determinada, torna-se necessário introduzir apoios ou fixações no modelo — as condições de fronteira.

Face aos apoios representados e às numerações de nós e de elementos indicados na Figura 4.5, as condições de fronteira particulares e as condições de carregamento exteriores do problema são

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ v_4 = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} f_3 = 0 \\ f_4 = 0 \\ f_5 = U_3^2 + U_3^3 = P \cos \beta, \\ f_6 = V_3^2 + V_3^3 = P \sin \beta \\ f_7 = 0 \end{cases}$$

respectivamente. Substituindo as condições de fronteira e os esforços externos no sistema global de equações, obtém-se

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1^h \\ R_1^v \\ 0 \\ 0 \\ P \cos \beta \\ P \sin \beta \\ 0 \\ R_4^v \end{Bmatrix},$$

em que R_1^h é a componente horizontal da força de reacção no apoio no nó 1, e R_1^v e R_4^v são as componentes verticais das forças de reacção nos apoios nos nós 1 e 4, respectivamente.

Dadas as condições de fronteira indicadas, facilmente se entenderá que os termos k_{i1} , k_{i2} e k_{i8} , $\forall i=1, \dots, 8$, podem ser quaisquer. Consequentemente, as colunas da matriz de rigidez correspondentes aos graus de liberdade nulos podem ser retiradas, assim como as respectivas linhas do sistema global de equações. Deste modo, o sistema global de equações anterior será resolvido retirando as equações correspondentes aos graus de liberdade conhecidos e nulos, isto é,

$$\begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} \\ k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} \\ k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} \\ k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} \\ k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \cos \beta \\ P \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix},$$

ou, de forma mais compacta, $\mathbf{K}'\mathbf{a}' = \mathbf{f}'$, em que $\mathbf{K}'$ é a matriz de rigidez reduzida, e $\mathbf{a}'$ e $\mathbf{f}'$ são os vectores de deslocamentos e de esforços nodais reduzidos, respectivamente. Este sistema reduzido, de cinco equações com cinco incógnitas — os graus de liberdade desconhecidos — pode ser resolvido recorrendo a um qualquer método de resolução de sistemas de equações lineares. Depois de determinados os graus de liberdade desconhecidos, podem construir-se as equações correspondentes aos graus de liberdade conhecidos para determinar as reacções nos apoios R_1^h , R_1^v e R_4^v .

De acordo com o anteriormente exposto, compreende-se que num problema estrutural do tipo do apresentado na Figura 4.5 a tarefa principal destinada ao computador é resolver um sistema de equações simultâneas em número igual ao número total de graus de liberdade desconhecidos e, assim, determinar o vector de deslocamentos nodais.

Referências Bibliográficas

1. Hinton, E, Owen, D.R.J. *An Introduction to Finite Element Computations*, Pineridge Press, Swansea, Reino Unido, 1980.
2. Hughes, T.J.R. *The Finite Element Method — Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2000.
3. Oñate, E. *Structural Analysis with the Finite Element Method — Linear Statics: Basis and Solids*, Vol. 1, Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences, Springer-Verlag, Berlim, Alemanha, 2009.
4. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method — The Basis*, Vol. 1, 5.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2000.

Parte II

Análise de Sistemas Discretos

Resumo Neste capítulo apresentam-se as abordagens matriciais que servem de base à análise de sistemas discretos de engenharia, tais como as estruturas articuladas, as estruturas reticuladas, os circuitos eléctricos e as redes hidráulicas. Inicia-se a apresentação destas matérias pela formulação uniaxial do elemento do tipo barra, prosseguindo depois para as estruturas articuladas planas. Descrevem-se as analogias com outros sistemas discretos de engenharia e apresenta-se a formulação para o elemento do tipo viga-barra, que se aplica ao caso das estruturas reticuladas bidimensionais.

5.1 Introdução

No dia-a-dia são muitas as situações práticas em que um determinado problema pode ser decomposto num conjunto finito de **elementos** diferentes. Estes elementos, que podem ser considerados distintos fisicamente, encontram-se unidos pelas extremidades — os **nós** — e podem ser submetidos a um conjunto de acções exteriores. Tais sistemas, muito frequentes em aplicações de engenharia, designam-se, usualmente, por sistemas discretos. Por comparação com os sistemas contínuos, nos sistemas discretos a etapa de discretização descrita no Capítulo 4 não é necessária uma vez que o domínio de estudo se encontra naturalmente discretizado.

5.2 Sistemas discretos

Algumas das áreas de engenharia em que existem sistemas que podem ser analisados como discretos são, por exemplo, os circuitos eléctricos (ver Figura 5.1(a)) e as redes hidráulicas (ver Figura 5.1(b)). Como se pode verificar, em todos os exemplos apresentados o problema pode ser decomposto em elementos fisicamente distintos. No caso dos circuitos eléctricos os elementos são as resistências eléctricas e no caso das redes hidráulicas os elementos são os troços de tubagem.

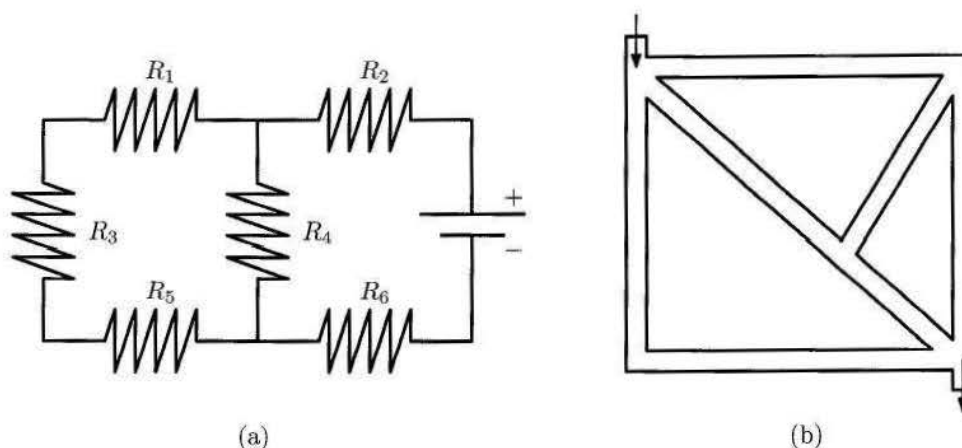


Figura 5.1 Exemplos de sistemas que podem ser analisados como discretos: (a) circuitos eléctricos e (b) redes hidráulicas.

As estruturas articuladas e as estruturas reticuladas são exemplos dos sistemas discretos mais comuns em problemas de engenharia, nomeadamente nas áreas de Engenharia Civil e Engenharia Mecânica. Nas Figuras 5.2(a) e (b) podem ver-se exemplos de uma estrutura reticulada e de uma estrutura articulada, respectivamente. Os pórticos, as estruturas de barras ou de vigas, e as treliças são exemplos de tais estruturas.

As estruturas articuladas distinguem-se das reticuladas pelos esforços que podem ser transmitidos entre os elementos que as constituem. Nas estruturas articuladas transmitem-se unicamente esforços normais entre as barras, enquanto que nas estruturas reticuladas transmitem-se, adicionalmente, esforços transversos e momentos flectores.

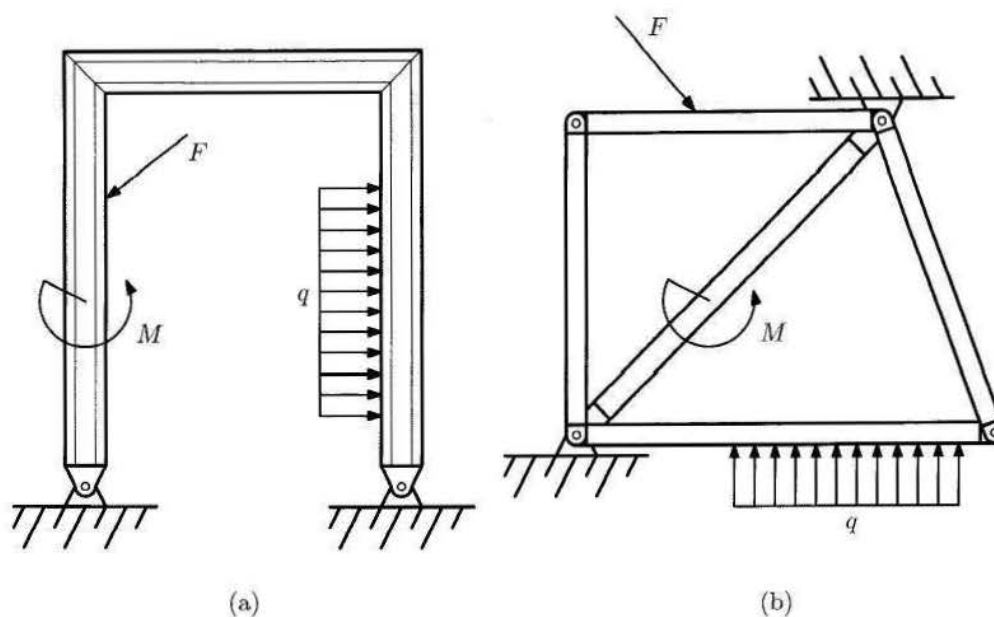


Figura 5.2 Alguns exemplos de sistemas discretos de ampla aplicação em problemas de Engenharia Civil e Engenharia Mecânica: (a) pórtico (estrutura reticulada) e (b) estrutura de barras (estrutura articulada).

5.2.1 Análise matricial de estruturas articuladas

Sempre que uma estrutura é constituída por barras interligadas por meio de articulações diz-se que a estrutura é articulada. Tal designação justifica-se pelo facto de estas estruturas transmitirem, unicamente, esforços axiais entre as barras. Este facto leva a que haja liberdade de rotação nas uniões (articulações) entre as barras, daí surgindo a designação de articuladas.

Como facilmente se perceberá, o cálculo analítico de estruturas articuladas recorrendo aos métodos de análise da mecânica das estruturas, tais como, por exemplo, os métodos das forças ou dos deslocamentos, está limitado pela complexidade da própria estrutura. Assim, torna-se necessário desenvolver métodos alternativos e sistemáticos que permitam realizar a análise do comportamento dessas estruturas de forma expedita. Um destes métodos baseia-se na análise matricial do equilíbrio da estrutura.

Para melhor entender este método, considere-se a barra e representada na Figura 5.3. Esta barra tem comprimento L^e , área de secção transversal A^e e é construída num material com comportamento linear elástico e módulo de

elasticidade E^e . Esta barra pode também ser designada por elemento e e as suas extremidades — os nós do elemento — serão aqui designadas por nó i e nó j .

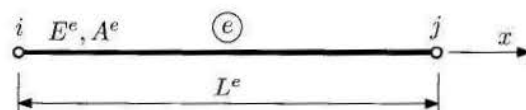


Figura 5.3 Elemento do tipo barra genérico e de uma estrutura articulada, com nós i e j , comprimento L^e , área de secção transversal A^e e módulo de elasticidade E^e .

Como foi referido, a barra e suporta unicamente esforços axiais, ou seja, na direcção Ox . Na Figura 5.4 pode ver-se a barra, depois de aplicadas as cargas axiais U_i^e e U_j^e nas extremidades i e j da barra, respectivamente. Estes esforços axiais podem também ser designados por esforços nodais.

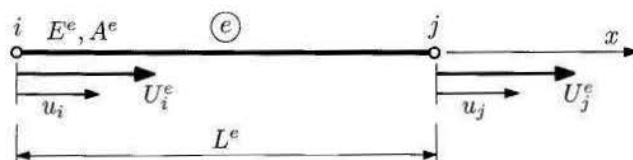


Figura 5.4 Elemento do tipo barra genérico e de uma estrutura articulada com representação dos esforços nodais, U_i^e e U_j^e , e dos deslocamentos nodais, u_i e u_j .

Baseada nas definições da Figura 5.4, a deformação axial da barra e pode ser calculada recorrendo à seguinte relação:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L^e}{L^e} = \frac{u_j - u_i}{L^e}, \quad (5.1)$$

em que u_i e u_j são os deslocamentos dos nós i e j do elemento, respectivamente.

Conhecida a deformação ε , e atendendo a que o material de que é construída a barra tem um comportamento linear elástico, pode determinar-se a tensão em qualquer secção transversal da barra recorrendo à lei de Hooke, isto é,

$$\sigma = E^e \varepsilon = E^e \left(\frac{u_j - u_i}{L^e} \right). \quad (5.2)$$

Uma vez que o elemento e transmite unicamente esforços axiais, a tensão σ , que é constante numa dada secção transversal da barra, é a mesma em todas as secções transversais da barra. Tal facto permite que se calcule o esforço axial N na barra multiplicando a tensão σ pela área da secção transversal A^e , isto é,

$$N = \sigma A^e = E^e A^e \left(\frac{u_j - u_i}{L^e} \right). \quad (5.3)$$

Por outro lado, considerando o equilíbrio estático da barra, pode afirmar-se que

$$U_j^e = -U_i^e. \quad (5.4)$$

Uma vez que U_i^e e U_j^e representam, precisamente, os esforços normais na barra, podem deduzir-se as seguintes relações entre as cargas e os deslocamentos nodais:

$$U_j^e = N = \frac{E^e A^e}{L^e} (u_j - u_i) = \frac{EA}{L} \Big| ^e (u_j - u_i) \quad (5.5)$$

e

$$U_i^e = -N = -\frac{E^e A^e}{L^e} (u_j - u_i) = \frac{EA}{L} \Big| ^e (u_i - u_j). \quad (5.6)$$

Uma vez que ambos os esforços axiais dependem dos deslocamentos nodais u_i e u_j , as duas equações anteriores podem ser agrupadas e escritas de forma matricial, resultando em

$$\begin{Bmatrix} U_i^e \\ U_j^e \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \Big| ^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}. \quad (5.7)$$

Para simplificar a escrita, e no seguimento do capítulo anterior, designam-se o vector dos esforços nodais U_i^e e U_j^e por $\mathbf{f}^e$ e o vector dos deslocamentos nodais u_i e u_j por $\mathbf{a}^e$. Assim, a equação matricial 5.7 pode reescrever-se, de forma mais compacta, como se segue:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e. \quad (5.8)$$

em que

$$\mathbf{k}^e = \frac{EA}{L} \Big| ^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Por analogia com o sistema massa-mola, cuja relação força-deslocamento se pode escrever na forma $F = k\Delta$, em que k é a rigidez da mola, k^e designa-se por matriz de rigidez do elemento do tipo barra e .

O raciocínio descrito nos parágrafos anteriores baseia-se na condição de que os únicos esforços que actuam na barra e são os esforços axiais nodais U_i^e e U_j^e . Porém, de forma a tornar esta abordagem o mais genérica possível, no que se segue considera-se a acção adicional de um esforço axial distribuído na barra, por unidade de comprimento, de magnitude b^e . A expressão 5.4, que representa o equilíbrio de forças do elemento do tipo barra e , pode ser estendida se se considerar, adicionalmente, o esforço b^e . Esta situação encontra-se descrita graficamente na Figura 5.5.

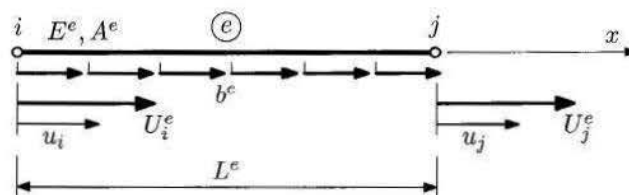


Figura 5.5 Elemento do tipo barra genérico e de uma estrutura articulada, com representação dos esforços nodais, U_i^e e U_j^e , dos deslocamentos nodais, u_i e u_j , e da carga axial distribuída, b^e .

O efeito da carga distribuída b^e no comportamento do elemento do tipo barra é considerado dividindo a sua resultante em partes iguais por ambos os nós i e j . Tal resulta nas relações força-deslocamento

$$U_j^e = \frac{EA}{L} \Big| ^e (u_j - u_i) - \frac{bL}{2} \Big| ^e \quad (5.10)$$

e

$$U_i^e = \frac{EA}{L} \Big| ^e (u_i - u_j) - \frac{bL}{2} \Big| ^e, \quad (5.11)$$

que podem ser reescritas de forma matricial, como

$$\begin{Bmatrix} U_i^e \\ U_j^e \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \Big| ^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} - \frac{bL}{2} \Big| ^e \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (5.12)$$

Por sua vez, a relação matricial anterior pode ser escrita de forma mais com-

pacta, como se segue:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{b}^e, \quad (5.13)$$

em que $\mathbf{b}^e$ é o vector das forças nodais provocadas pela acção das cargas exteriores distribuídas.

Note-se que o procedimento de assemblagem dos sistemas de equações elementares para formar o sistema de equações global é em tudo idêntico ao descrito na Secção 4.2.

Exercício 5.1. Considere a estrutura de barras alinhadas representada na Figura 5.6(a). As barras são construídas de um material com densidade ρ e módulo de elasticidade E . As áreas das secções transversais das barras AB e BC são $A_1 = A$ e $A_2 = 2A$, respectivamente.

Recorrendo unicamente a métodos matriciais, determine a força de reacção no apoio A e os deslocamentos dos pontos B e C em duas situações distintas: (a) não considerando e (b) considerando o peso próprio das barras.

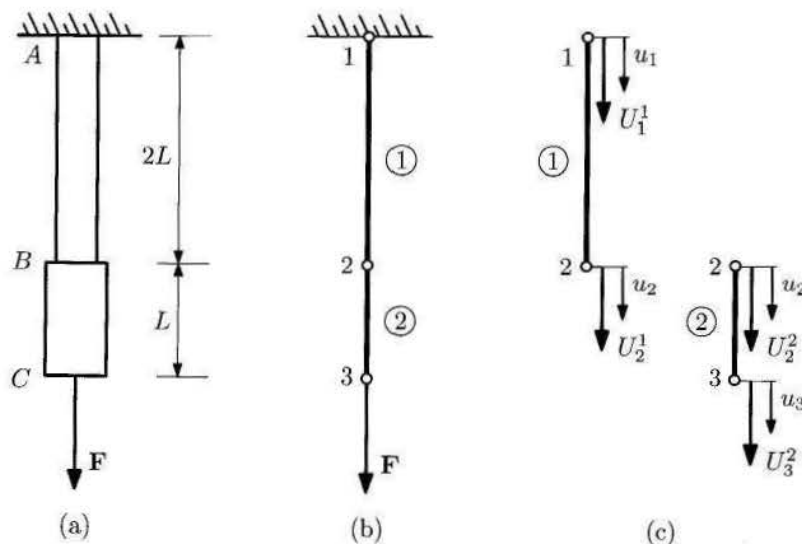


Figura 5.6 Estrutura de barras alinhadas para o Exercício 5.1: (a) representação esquemática da estrutura de barras, (b) malha de elementos finitos utilizada para resolver o problema e (c) representação dos graus de liberdade do problema (u_i) e dos esforços internos nos nós (U_i^e).

Resolução

a) Em primeiro lugar, procede-se à numeração de elementos e nós, conforme se mostra na Figura 5.6(b). Designam-se por u_i e por U_i^e os valores nodais dos deslocamentos e das forças axiais nas barras, respectivamente. No caso em que não se considera o efeito do peso próprio das barras pode recorrer-se à expressão 5.13 com $\mathbf{b}^e = \mathbf{0}$. Assim, na forma matricial, o sistema de equações para a barra AB (elemento 1) pode ser escrito de acordo com a expressão 5.12 (com $b^e = 0$), ou seja,

$$\begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}.$$

De modo idêntico, para a barra BC , que corresponde ao elemento 2, obtém-se

$$\begin{Bmatrix} U_2^2 \\ U_3^2 \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}.$$

De acordo com a conectividade da malha, da assemblagem dos sistemas de equações anteriores resulta o seguinte sistema global:

$$\begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 + U_2^2 \\ U_3^2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}.$$

Uma vez que os dois elementos da estrutura concorrem no nó 2, o procedimento de assemblagem deve considerar que a resultante das forças internas é igual à resultante das forças externas neste nó, isto é,

$$U_2^1 + U_2^2 = 0.$$

Pelo mesmo motivo, a força $U_1^1 = R_A$ é a reacção no apoio A e a força $U_3^2 = F = \|\mathbf{F}\|$. Como condições de fronteira tem-se que $u_1 = 0$. Introduzindo as condições anteriores no sistema global de equações, resulta

$$\begin{Bmatrix} R_A \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}.$$

Uma vez que o primeiro grau de liberdade do sistema é nulo, de forma a determinar em primeiro lugar apenas os deslocamentos, elimina-se esta equação, assim como a coluna correspondente. O sistema de equações reduzido corresponde, assim, a

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2,5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}.$$

Resolvendo este sistema de duas equações a duas incógnitas, determinam-se os deslocamentos dos nós 2 e 3, isto é,

$$u_2 = \frac{2FL}{EA} \quad \text{e} \quad u_3 = \frac{5FL}{2EA}.$$

Uma vez determinados os deslocamentos de todos os nós, pode calcular-se a força de reacção no apoio *A* reescrevendo a primeira equação do sistema global, isto é,

$$R_A = \frac{EA}{2L} \times 0 - \frac{EA}{2L} u_2 + 0 \times \frac{EA}{L} u_3 = -\frac{EA}{2L} u_2.$$

Substituindo o valor de u_2 na equação anterior, pode determinar-se, como seria de esperar, que

$$R_A = -\frac{EA}{2L} \times \frac{2FL}{EA} = -F.$$

- b) Para o caso em que se considera o efeito do peso próprio das barras, é necessário determinar o vector $\mathbf{b}^e$ das forças nodais provocadas pela acção da carga distribuída. Uma vez que o elemento 1 tem área de secção transversal *A*, então

$$b^1 = \rho g A,$$

em que ρ é a densidade do material e g é a aceleração gravítica. O elemento 2 tem área de secção transversal $2A$, de modo que $b^2 = 2\rho g A$. Consequentemente, o sistema de equações para o elemento finito 1 pode ser escrito recorrendo à expressão 5.12, isto é,

$$\begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \frac{2b^1 L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \rho g AL \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

De modo idêntico, para o elemento 2, resulta

$$\begin{Bmatrix} U_2^2 \\ U_3^2 \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \rho g AL \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Procedendo à assemblagem dos sistemas elementares e introduzindo a condição de equilíbrio de forças nos nós e as condições de fronteira, obtém-se o seguinte sistema global:

$$\begin{Bmatrix} R_A \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \rho g AL \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 + 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Eliminando a primeira equação, correspondente ao grau de liberdade nulo ($u_1 = 0$), obtém-se o sistema reduzido

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2,5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \rho g AL \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

com o qual se determinam os deslocamentos nos nós 2 e 3, isto é,

$$u_2 = \frac{L}{E} \left(\frac{2F}{A} + 6\rho g L \right)$$

e

$$u_3 = \frac{L}{E} \left(\frac{5F}{2A} + \frac{13}{2}\rho g L \right).$$

Uma vez determinados os deslocamentos dos nós, pode calcular-se a força de reacção no apoio A reescrevendo a primeira equação do sistema global, isto é,

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{EA}{2L} \times 0 - \frac{EA}{2L} u_2 + 0 \times \frac{EA}{L} u_3 - \rho g AL \\ &= -\frac{EA}{2L} u_2 - \rho g AL. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de u_2 calculado anteriormente, determina-se, como seria de esperar, que

$$R_A = -\frac{EA}{2L} \times \frac{L}{E} \left(\frac{2F}{A} + 6\rho gL \right) - \rho gAL = -(F + 4\rho gAL).$$

Note-se que o peso total das duas barras é, precisamente, $4\rho gAL$.

Como facilmente se entenderá, na forma como foram apresentados, os formalismos expostos nos parágrafos anteriores só podem ser aplicados ao cálculo de estruturas articuladas em que todos os seus elementos estejam alinhados, ou seja, somente na situação em que os graus de liberdade de todos os elementos da estrutura sejam colineares, isto é, em que os elementos sejam coaxiais.

Nas secções seguintes estende-se a abordagem descrita nos parágrafos anteriores às estruturas planas, ou seja, às estruturas em que os seus elementos são coplanares, mas não necessariamente coaxiais.

5.2.2 Estruturas articuladas planas

As estruturas articuladas planas são todas as estruturas bidimensionais em que os seus elementos constituintes possam não ter os seus eixos paralelos. Na Figura 5.2(b) pode ver-se um exemplo de uma tal estrutura.

Uma vez que os elementos de uma estrutura articulada plana podem ter orientações distintas, torna-se necessário definir um sistema de eixos global para a estrutura. Este sistema de eixos global será aqui designado por Oxy . De forma análoga, é necessário associar a cada elemento do tipo barra genérico um sistema de eixos local. Este sistema de eixos, aqui designado por $O'x'y'$, está associado ao elemento e e tem o eixo $O'x'$ alinhado com o eixo da barra, orientado no sentido do nó i para o nó j . Na Figura 5.7 mostra-se uma representação esquemática do elemento do tipo barra genérico e . No caso representado, o eixo da barra está rodado um ângulo α relativamente ao eixo global Ox .

Como consequência da definição dos sistemas de eixos, cada grau de liberdade de uma estrutura articulada plana terá que ser decomposto em dois graus de liberdade dependentes. Estes graus de liberdade correspondem às projecções dos deslocamentos axiais da barra nas duas direcções ortogonais do sistema de eixos global. Porém, deve notar-se que a equação 5.3, que relaciona os deslocamentos axiais de um elemento do tipo barra com os respectivos esforços nodais, se mantém válida nesta situação. Na realidade, trata-se unicamente de decompor

os graus de liberdade de um elemento genérico e , cujo sistema de eixos local é $O'x'y'$, para o sistema de eixos ortogonais global da estrutura Oxy .

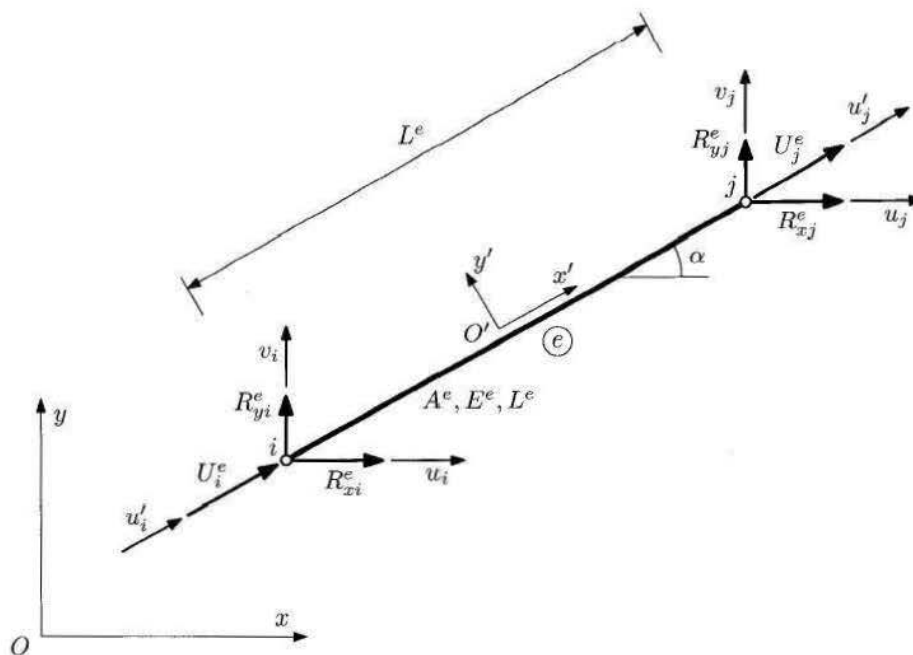


Figura 5.7 Elemento do tipo barra genérico e de uma estrutura articulada plana, com representação dos sistemas de eixos local e global, assim como dos esforços e deslocamentos nodais.

Para que seja possível considerar o efeito aditivo das forças nas extremidades dos elementos que concorrem num determinado nó, torna-se necessário expressar as relações força-deslocamento relativamente ao sistema de eixos ortogonais global Oxy . Para tal, considere-se o elemento do tipo barra genérico representado na Figura 5.7. Para o caso apresentado, em que o eixo da barra faz um ângulo α com o eixo global Ox , pode determinar-se que, para o nó i , a decomposição das forças axiais na barra é dada por

$$\begin{cases} R_{xi}^e = U_i^e \cos \alpha \\ R_{yi}^e = U_i^e \sin \alpha \end{cases} \quad (5.14)$$

De modo análogo, para o nó j pode escrever-se que

$$\begin{cases} R_{xj}^e = U_j^e \cos \alpha \\ R_{yj}^e = U_j^e \sin \alpha \end{cases} \quad (5.15)$$

Por outro lado, a decomposição dos deslocamentos axiais da barra nas direcções do sistema de eixos global é

$$\begin{cases} u'_i = u_i \cos \alpha + v_i \sin \alpha \\ u'_j = u_j \cos \alpha + v_j \sin \alpha \end{cases} \quad (5.16)$$

As relações 5.14 e 5.15 de decomposição dos esforços nodais podem ser re-escritas de forma matricial. Para o nó i obtém-se

$$\mathbf{f}_i^e = \begin{Bmatrix} R_{x_i}^e \\ R_{y_i}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} U_i^e = (\mathbf{L}^e)^T U_i^e \quad (5.17)$$

e para o nó j resulta

$$\mathbf{f}_j^e = \begin{Bmatrix} R_{x_j}^e \\ R_{y_j}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} U_j^e = (\mathbf{L}^e)^T U_j^e. \quad (5.18)$$

Nas expressões anteriores, $\mathbf{f}_i^e$ e $\mathbf{f}_j^e$ são os vectores das forças nodais. $\mathbf{L}^e$ é a matriz de decomposição de grandezas vectoriais do referencial ortogonal global Oxy para o referencial local $O'x'y'$.

Reescrevendo matricialmente as relações 5.16 de decomposição dos deslocamentos nodais obtém-se, para o nó i ,

$$u'_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \mathbf{L}^e \mathbf{a}_i \quad (5.19)$$

e, para o nó j ,

$$u'_j = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \mathbf{L}^e \mathbf{a}_j. \quad (5.20)$$

Nas expressões anteriores, $\mathbf{a}_i$ e $\mathbf{a}_j$ são os vectores dos deslocamentos nodais do elemento do tipo barra genérico e .

Analisando o equilíbrio do elemento representado na Figura 5.7 e recordando as expressões 5.5 e 5.6 pode determinar-se que

$$\begin{aligned} U_i^e &= -U_j^e \\ &= \frac{EA}{L} \Big|_e (u'_i - u'_j). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Introduzindo as relações força-deslocamento 5.21 nas equações 5.17 e 5.18, obtém-se o seguinte resultado:

$$\mathbf{f}_i^e = (\mathbf{L}^e)^T \frac{EA}{L} \Big| \left(u'_i - u'_j \right) \quad (5.22)$$

e

$$\mathbf{f}_j^e = (\mathbf{L}^e)^T \frac{EA}{L} \Big| \left(-u'_i + u'_j \right). \quad (5.23)$$

Substituindo os deslocamentos nodais u'_i e u'_j nas expressões anteriores, e após alguma manipulação algébrica, obtém-se

$$\mathbf{f}_i^e = (\mathbf{L}^e)^T \frac{EA}{L} \Big| \mathbf{L}^e \mathbf{a}_i - (\mathbf{L}^e)^T \frac{EA}{L} \Big| \mathbf{L}^e \mathbf{a}_j \quad (5.24)$$

e

$$\mathbf{f}_j^e = -(\mathbf{L}^e)^T \frac{EA}{L} \Big| \mathbf{L}^e \mathbf{a}_i + (\mathbf{L}^e)^T \frac{EA}{L} \Big| \mathbf{L}^e \mathbf{a}_j. \quad (5.25)$$

Designando a rigidez axial da barra genérica por k^e , as expressões anteriores podem escrever-se, de forma mais compacta, como

$$\mathbf{f}_i^e = (\mathbf{L}^e)^T k^e \mathbf{L}^e \mathbf{a}_i - (\mathbf{L}^e)^T k^e \mathbf{L}^e \mathbf{a}_j \quad (5.26)$$

e

$$\mathbf{f}_j^e = -(\mathbf{L}^e)^T k^e \mathbf{L}^e \mathbf{a}_i + (\mathbf{L}^e)^T k^e \mathbf{L}^e \mathbf{a}_j, \quad (5.27)$$

ou, de forma matricial, como

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i^e \\ \mathbf{f}_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii}^e & \mathbf{k}_{ij}^e \\ \mathbf{k}_{ji}^e & \mathbf{k}_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \end{Bmatrix}. \quad (5.28)$$

Na relação matricial anterior, as submatrizes $\mathbf{k}_{ii}^e$, $\mathbf{k}_{jj}^e$, $\mathbf{k}_{ij}^e$ e $\mathbf{k}_{ji}^e$ respeitam a seguinte condição:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{ii}^e &= \mathbf{k}_{jj}^e \\ &= -\mathbf{k}_{ij}^e = -\mathbf{k}_{ji}^e \\ &= (\mathbf{L}^e)^T k^e \mathbf{L}^e. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Ora, uma vez que a rigidez axial da barra — k^e — é um valor escalar, é possível operar directamente as matrizes de decomposição $(\mathbf{L}^e)^T$ e $\mathbf{L}^e$. Daqui resulta que

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{L}^e)^T k^e \mathbf{L}^e &= k^e (\mathbf{L}^e)^T \mathbf{L}^e \\
 &= k^e \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Consequentemente, recordando a expressão 5.28, o sistema de equações para o elemento do tipo barra genérico e pode escrever-se, de forma compacta, como

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e. \quad (5.31)$$

No sistema de equações anterior

$$\mathbf{f}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i^e \\ \mathbf{f}_j^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{x_i}^e \\ R_{y_i}^e \\ R_{x_j}^e \\ R_{y_j}^e \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

são o vector das forças nodais elementares e o vector dos deslocamentos nodais, respectivamente. Expandindo a matriz de rigidez elementar $\mathbf{k}^e$ obtém-se o seguinte resultado:

$$\mathbf{k}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Note-se que, mais uma vez, o procedimento de assemblagem dos sistemas de equações elementares para formar o sistema de equações global é em tudo idêntico ao descrito na Secção 4.2.

Exercício 5.2. Considere a estrutura articulada plana representada na Figura 5.8. Todas as barras têm módulo de elasticidade E e área de secção transversal A . Determine os esforços de reacção nos apoios A e B , a componente de deslocamento vertical do apoio A e as componentes de deslocamento vertical e horizontal do ponto C .

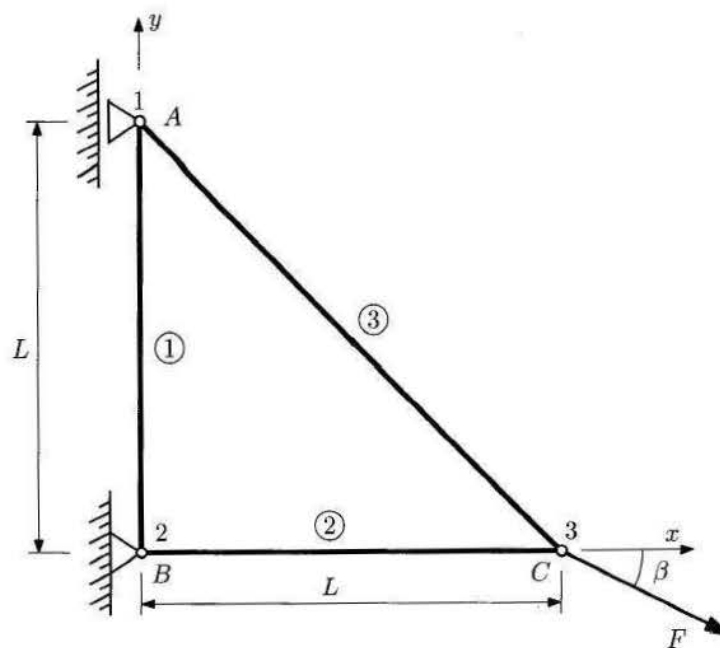


Figura 5.8 Estrutura articulada plana constituída por três elementos do tipo barra, com três nós e seis graus de liberdade, para o Exercício 5.2.

Resolução

A conectividade e as restantes características geométricas da estrutura articulada são as indicadas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 Conectividade e características da estrutura articulada plana, para o Exercício 5.2.

Elemento	Nós	Comprimento	Área	Orientação	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin^2 \alpha$	$\cos^2 \alpha$
1	1, 2	L	A	$\alpha = -90^\circ$	-1	0	1	0
2	2, 3	L	A	$\alpha = 0^\circ$	0	1	0	1
3	1, 3	$\sqrt{2}L$	A	$\alpha = -45^\circ$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	1/2

O ângulo de orientação mede-se, por convenção, definindo um vector de orientação do nó com menor numeração para o nó de maior numeração e pondo o semieixo positivo Ox com origem no ponto de aplicação deste vector. O ângulo de orientação do elemento corresponde ao ângulo que este vector faz com

Ox. Recorrendo à expressão 5.33 e aos dados indicados na Tabela 5.1 podem construir-se as matrizes de rigidez elementares de todos os elementos da estrutura, isto é,

$$\mathbf{k}^1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}^2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\mathbf{k}^3 = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Uma vez construídos os sistemas elementares, procede-se à montagem para o sistema global de equações $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$, de acordo com a conectividade da malha indicada na Tabela 5.1. Assim, para a estrutura apresentada, o sistema global resulta

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1^1 + U_1^3 \\ V_1^1 + V_1^3 \\ U_2^1 + U_2^2 \\ V_2^1 + V_2^2 \\ U_3^2 + U_3^3 \\ V_3^2 + V_3^3 \end{Bmatrix},$$

em que u_i e v_i são as componentes de deslocamento horizontal e vertical no nó i — os graus de liberdade da estrutura —, respectivamente. U_i^e e V_i^e são as contribuições de esforço horizontal e vertical do elemento e no nó i , respectivamente. Introduzindo as condições de equilíbrio de força nos nós e as condições de fronteira, obtém-se

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ v_1 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H^1 \\ 0 \\ H^2 \\ V^2 \\ F \cos \beta \\ -F \sin \beta \end{Bmatrix}.$$

Eliminando as equações correspondentes aos graus de liberdade nulos (equações dos graus de liberdade 1, 3 e 4) e as colunas correspondentes no sistema de equações global, obtém-se o seguinte sistema de equações reduzido:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \cos \beta \\ -F \sin \beta \end{Bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema de equações anterior, obtém-se os deslocamentos nodais

$$v_1 = -\frac{FL}{EA} \sin \beta,$$

$$u_3 = \frac{FL}{EA} (-\sin \beta + \cos \beta) \quad \text{e} \quad v_3 = -\frac{FL}{EA} [(2\sqrt{2} + 2) \sin \beta - \cos \beta].$$

Os esforços de reacção nos apoios *A* e *B* determinam-se reescrevendo as equações dos graus de liberdade 1, 3 e 4, isto é,

$$H^1 = \frac{EA}{L} \left(\frac{v_3}{2\sqrt{2}} - \frac{u_3 + v_1}{2\sqrt{2}} \right) = -F \sin \beta,$$

$$H^2 = -\frac{EA}{L} u_3 = F(\sin \beta - \cos \beta) \quad \text{e} \quad V^2 = -\frac{EA}{L} v_1 = F \sin \beta.$$

5.2.3 Analogias com outros sistemas discretos

Toda a formulação apresentada na secção anterior pode ser aplicada, sem grandes alterações, a outros tipos de sistemas discretos. Nesta secção descreve-se a aplicação da análise matricial (também descrita na secção anterior) a outros sistemas discretos, tais como, por exemplo, os circuitos eléctricos e as redes hidráulicas (tubagens).

Para o primeiro caso — os circuitos eléctricos — pode considerar-se uma resistência eléctrica como elemento *e* e o valor do potencial eléctrico nas suas extremidades como a incógnita que se pretende determinar, ou seja, o grau de liberdade. Consequentemente, pode recorrer-se à lei de Ohm para relacionar os potenciais nas extremidades da resistência com as respectivas intensidades de corrente. Consequentemente, para o elemento genérico *e* representado na

Figura 5.9, a lei de Ohm pode escrever-se da seguinte forma:

$$\begin{cases} I_i^e = \frac{1}{R^e}(V_i - V_j) \\ I_j^e = \frac{1}{R^e}(-V_i + V_j) \end{cases}, \quad (5.34)$$

em que I_i^e e I_j^e são as intensidades de corrente que entram nos nós i e j , respectivamente. R^e é a resistência eléctrica do elemento e , e V_i e V_j são os potenciais eléctricos nos nós i e j , respectivamente.

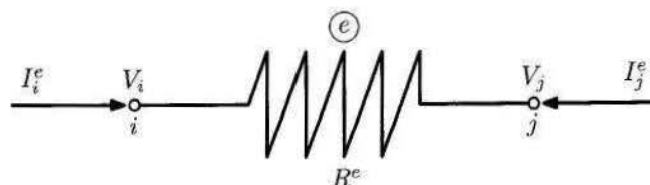


Figura 5.9 Elemento do tipo resistência eléctrica genérico e de um circuito eléctrico, com representação das intensidades de corrente nodais, I_i^e e I_j^e , e dos potenciais eléctricos nodais, V_i e V_j .

Como se poderá verificar facilmente, as equações 5.34 são formalmente idênticas às apresentadas, na Secção 5.2.1 (ver equações 5.5 e 5.6), para o elemento do tipo barra. Analisando estas relações pode verificar-se que, para transitar de umas para as outras, bastará:

- Trocar as forças nodais U_i^e e U_j^e , do elemento do tipo barra, pelas intensidades de corrente I_i^e e I_j^e , do elemento do tipo resistência eléctrica, respectivamente;
- Trocar os deslocamentos axiais u_i e u_j , do elemento do tipo barra, pelos potenciais eléctricos V_i e V_j , do elemento do tipo resistência eléctrica, respectivamente;
- Trocar a rigidez do elemento do tipo barra ($k^e = EA/L$), pelo inverso da resistência eléctrica ($1/R^e$) associada ao elemento do tipo resistência eléctrica.

Assim, a forma matricial das equações do elemento do tipo resistência eléctrica é

$$\begin{Bmatrix} I_i^e \\ I_j^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{R^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix}, \quad (5.35)$$

ou seja, de forma condensada,

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e. \quad (5.36)$$

Neste caso, $\mathbf{f}^e$ é o vector das intensidades de corrente nodais, $\mathbf{a}^e$ é o vector dos potenciais eléctricos nodais e $\mathbf{k}^e$ é a matriz dos inversos da resistência eléctrica. Por analogia com o sistema estrutural, a matriz $\mathbf{k}^e$ será, também neste caso, designada por matriz de rigidez elementar.

As analogias descritas nos parágrafos anteriores podem ainda estender-se a outros sistemas discretos, tais como, por exemplo, as redes hidráulicas. Neste caso, os elementos genéricos serão os troços de tubagem com área de secção transversal constante. Na Figura 5.10 pode ver-se uma representação esquemática deste elemento genérico.

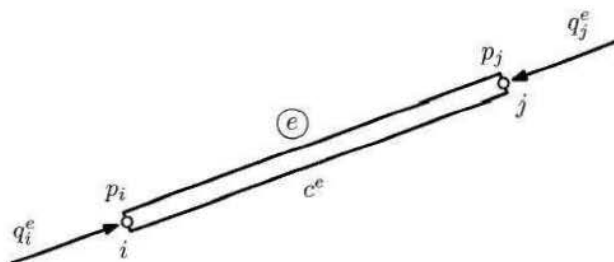


Figura 5.10 Elemento do tipo tubo genérico e de uma rede hidráulica, com representação dos caudais nodais, q_i^e e q_j^e , e das alturas piezométricas nodais, p_i e p_j .

No caso referido, o sistema elementar de equações relaciona, por exemplo, os caudais nodais q_i^e e q_j^e que entram nos nós i e j , respectivamente, com as alturas piezométricas p_i e p_j nos nós correspondentes. A altura piezométrica é a pressão expressa em metros de coluna de água.

Assumindo, por simplificação, que o caudal depende da diferença de pressão entre as extremidades de cada troço de tubagem, as relações referidas no parágrafo anterior podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} q_i^e = c^e(p_i - p_j) \\ q_j^e = c^e(-p_i + p_j) \end{cases}, \quad (5.37)$$

em que c^e é um coeficiente que depende das características de escoamento no interior do elemento finito do tipo tubo. Mais uma vez, as equações anteriores

podem ser reescritas matricialmente como

$$\begin{Bmatrix} q_i^e \\ q_j^e \end{Bmatrix} = c^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix}, \quad (5.38)$$

ou ainda, de forma mais compacta,

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e, \quad (5.39)$$

em que $\mathbf{f}^e$ é o vector dos caudais nodais, $\mathbf{k}^e$ é a matriz de rigidez elementar e $\mathbf{a}^e$ é o vector das alturas piezométricas nodais. Em rigor, no caso presente das redes hidráulicas (ou redes de tubagens), a matriz $\mathbf{k}^e$ depende, através do coeficiente c^e , da rugosidade interna dos tubos, da secção transversal — área e geometria — do troço de tubagem e (elemento) e da diferença de altura a que se encontram as suas extremidades (nós).

De acordo com os casos apresentados até ao momento, podem estabelecer-se algumas relações de analogia entre o elemento finito do tipo barra, o elemento finito do tipo resistência eléctrica e o elemento finito do tipo tubo. Estas relações são as que se apresentam, de forma resumida, na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 Analogias entre o elemento finito do tipo barra, o elemento finito do tipo resistência eléctrica e o elemento finito do tipo tubo.

Elemento	Deslocamentos nodais $\mathbf{a}^e$	Forças nodais $\mathbf{f}^e$	Rigidez elementar $\mathbf{k}^e$
Barra	Deslocamentos u_i e u_j	Forças U_i^e e U_j^e	$\frac{EA}{l} ^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
Resistência	Potenciais V_i e V_j	Intensidades I_i^e e I_j^e	$\frac{1}{R^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
Tubo	Alturas piezométricas p_i e p_j	Caudais q_i^e e q_j^e	$c^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 5.3. Na Figura 5.11 está representada uma ponte de Wheatstone, à qual é aplicada uma diferença de potencial $\Delta V = 10$ V. Considere

que as resistências são $R_1 = 1000 \, \Omega$, $R_2 = 1500 \, \Omega$ e $R_3 = 500 \, \Omega$, e que a intensidade de corrente à entrada da ponte é $I^+ = 8 \, \text{mA}$. Determine a resistência R_4 e a intensidade de corrente I^- , assim como o potencial em todos os nós.

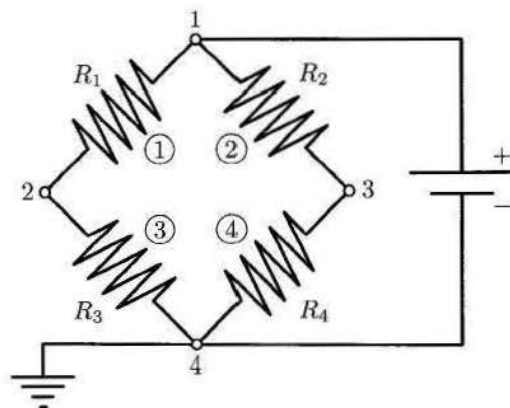


Figura 5.11 Representação esquemática da ponte de Wheatstone, para o Exercício 5.3.

Resolução

A conectividade da malha e as características do circuito eléctrico da ponte de Wheatstone são as indicadas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 Conectividade e características do circuito eléctrico da ponte de Wheatstone, para o Exercício 5.3.

Elemento	Nós	Resistência
1	1, 2	$R_1 = 1000 \, \Omega$
2	1, 3	$R_2 = 1500 \, \Omega$
3	2, 4	$R_3 = 500 \, \Omega$
4	3, 4	R_4

Recorrendo ao sistema de equações 5.35, os sistemas de equações elementares podem ser escritos da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} I_1^1 \\ I_2^1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} I_1^2 \\ I_3^2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} I_2^3 \\ I_4^3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ V_4 \end{Bmatrix}$$

e

$$\begin{Bmatrix} I_3^4 \\ I_4^4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{R_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix}.$$

De acordo com a conectividade do sistema e com as regras anteriormente definidas para a assemblagem, pode construir-se o seguinte sistema global de equações:

$$\begin{Bmatrix} I_1^1 + I_1^2 \\ I_2^1 + I_2^3 \\ I_3^2 + I_3^4 \\ I_4^3 + I_4^4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} & 0 & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & 0 & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix}.$$

No sistema de equações anterior, V_i é o potencial no nó i — os graus de liberdade do sistema — e I_i^e é a contribuição do nó i para a intensidade de corrente no elemento e . As condições de fronteira do problema são

$$\begin{cases} V_1 = 10 \text{ V} \\ V_4 = 0 \text{ V} \end{cases}.$$

Introduzindo as condições de equilíbrio de intensidade de corrente nos nós e as condições de fronteira no sistema global de equações, obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{Bmatrix} I^+ \\ 0 \\ 0 \\ I^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} & 0 & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & 0 & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ V_2 \\ V_3 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Eliminando a quarta equação do sistema de equações global, correspondente ao grau de liberdade nulo ($V_4 = 0 \text{ V}$), e a respectiva coluna, e introduzindo os valores conhecidos, obtém-se o sistema de equações reduzido

$$\begin{Bmatrix} 0,008 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/600 & -1/1000 & -1/1500 \\ -1/1000 & 3/1000 & 0 \\ -1/1500 & 0 & 1/1500 + 1/R_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema constituído pelas primeira e segunda equações do sistema reduzido obtêm-se os graus de liberdade desconhecidos — os potenciais nos nós 2 e 3, isto é,

$$\begin{cases} V_2 = \frac{10}{3} \text{ V} \\ V_3 = 8 \text{ V} \end{cases}.$$

Depois de determinados os potenciais, pode resolver-se a terceira equação e determinar a resistência R_4 , obtendo-se

$$R_4 = 6000 \, \Omega.$$

Por fim, a resolução da quarta equação do sistema global não-reduzido permite determinar que

$$I^- = -8 \text{ mA}.$$

5.2.4 Estruturas reticuladas planas

Nesta secção estendem-se os formalismos das secções anteriores ao elemento do tipo viga-barra, isto é, às estruturas em que os nós estão ligados de forma rígida. Estas estruturas serão aqui designadas por estruturas reticuladas planas e têm a particularidade de transmitirem, além dos esforços normais, momentos flectores e esforços transversos nas ligações entre elementos.

Na Figura 5.12 mostra-se um elemento do tipo viga-barra genérico de uma estrutura reticulada plana e indicam-se os seus graus de liberdade — os deslocamentos e as rotações nos nós — e os carregamentos — as forças e os momentos nos nós.

Este elemento do tipo viga-barra, designado por elemento e , tem nós i e j , comprimento L^e , secção transversal com área A^e e momento de inércia I^e . Considera-se ainda que o elemento e é construído num material com comportamento linear elástico com módulo de elasticidade E^e .

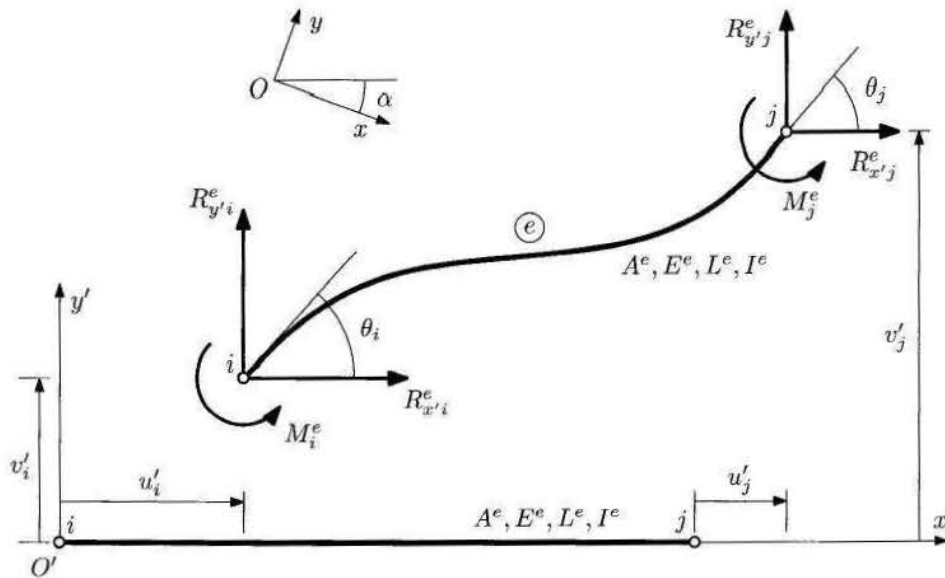


Figura 5.12 Elemento do tipo viga-barra genérico e de uma estrutura reticulada plana (configurações original e deformada) com representação dos sistemas de eixos local $O'x'y'$ e global Oxy , dos esforços, momentos, deslocamentos e rotações nodais.

Como foi referido, o elemento do tipo viga-barra transmite quer esforços axiais e esforços transversos quer momentos flectores. Assim, a cada nó do elemento e associam-se três graus de liberdade distintos: (i) a componente de deslocamento na direcção $O'x'$, designada por u' ; (ii) a componente de deslocamento na direcção $O'y'$, designada por v' ; (iii) a rotação do nó em torno de $O'z'$, designada por θ . Consequentemente, cada nó tem associadas duas componentes de força e um momento: (i) a componente de força na direcção $O'x'$, designada por $R^e_{x'}$; (ii) a componente de força na direcção $O'y'$, designada por $R^e_{y'}$; (iii) o momento flector em torno de $O'z'$, designado por M^e . Todos estes graus de liberdade e carregamentos nodais estão representados na Figura 5.12.

Os graus de liberdade do elemento e podem ser organizados de forma vectorial como se segue:

$$\mathbf{a}_i^e = \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_j^e = \begin{Bmatrix} u'_j \\ v'_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}, \quad (5.40)$$

ou agrupados num só vector de deslocamentos nodais como

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i^e \\ \mathbf{a}_j^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ \theta_i \\ u'_j \\ v'_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}. \quad (5.41)$$

Por outro lado, os carregamentos podem ser escritos de forma análoga como

$$\mathbf{f}_i^e = \begin{Bmatrix} R_{x'i}^e \\ R_{y'i}^e \\ M_i^e \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_j^e = \begin{Bmatrix} R_{x'j}^e \\ R_{y'j}^e \\ M_j^e \end{Bmatrix}, \quad (5.42)$$

ou agrupados num só vector de carregamentos nodais como

$$\mathbf{f}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i^e \\ \mathbf{f}_j^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{x'i}^e \\ R_{y'i}^e \\ M_i^e \\ R_{x'j}^e \\ R_{y'j}^e \\ M_j^e \end{Bmatrix}. \quad (5.43)$$

Por ser independente dos esforços transversos e dos momentos flectores, a componente axial de deslocamento da viga-barra é idêntica à do caso do elemento genérico do tipo barra. Esta componente pode então ser determinada recorrendo à equação 5.7, ou seja,

$$\begin{Bmatrix} R_{x'i}^e \\ R_{x'j}^e \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ u'_j \end{Bmatrix}. \quad (5.44)$$

As restantes relações entre os esforços nas extremidades da viga-barra e os correspondentes graus de liberdade podem obter-se a partir das equações elásticas genéricas de uma viga em pequenas transformações (deslocamentos, rotações e deformações). Ora, de uma forma genérica, a relação entre o momento numa

extremidade da viga-barra e os respectivos graus de liberdade pode escrever-se como

$$M_i^e = 2 \frac{E^e I^e}{L^e} \left(2\theta_i + \theta_j - \frac{3\Delta}{L^e} \right), \quad (5.45)$$

em que I^e é o momento de inércia da secção transversal da viga-barra e em torno do eixo local $O'z'$. $\Delta = v'_j - v'_i$ representa o deslocamento relativo de uma das extremidades da viga-barra em relação à outra. A expressão anterior pode assim ser escrita para os dois nós da viga-barra na forma

$$M_i^e = 2 \frac{EI}{L} \Big| \Big|^e \left[2\theta_i + \theta_j + \frac{3(v'_i - v'_j)}{L^e} \right] \quad (5.46)$$

e

$$M_j^e = 2 \frac{EI}{L} \Big| \Big|^e \left[\theta_i + 2\theta_j + \frac{3(v'_i - v'_j)}{L^e} \right]. \quad (5.47)$$

Calculando os momentos flectores em relação a cada um dos dois nós do elemento do tipo viga-barra e , obtêm-se as equações de equilíbrio

$$\begin{cases} M_i^e + M_j^e + R_{y'j}^e L^e = 0 \\ M_i^e + M_j^e - R_{y'i}^e L^e = 0 \end{cases} \quad (5.48)$$

Manipulando as equações 5.46 a 5.48 podem determinar-se as seguintes relações entre os esforços transversais, e os deslocamentos e as rotações nos nós do elemento e :

$$R_{y'i}^e = \frac{12EI}{L^3} \Big| \Big|^e (v'_i - v'_j) + \frac{6EI}{L^2} \Big| \Big|^e (\theta_i + \theta_j) \quad (5.49)$$

e

$$R_{y'j}^e = \frac{12EI}{L^3} \Big| \Big|^e (-v'_i + v'_j) - \frac{6EI}{L^2} \Big| \Big|^e (\theta_i + \theta_j). \quad (5.50)$$

As equações de equilíbrio anteriores podem ser manipuladas algebricamente e escritas de modo matricial, resultando num sistema de equações na forma genérica

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e, \quad (5.51)$$

em que $\mathbf{f}^e$ é o vector dos carregamentos nodais no sistema de eixos local, $\mathbf{a}^e$ é o vector dos graus de liberdade nodais no referencial local e $\mathbf{k}^e$ é a matriz de rigidez do elemento do tipo viga-barra e , também no sistema de eixos local. De

forma mais estendida, o sistema de equações 5.51 pode ser reescrito como

$$\mathbf{f}'^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i'^e \\ \mathbf{f}_j'^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii}'^e & \mathbf{k}_{ij}'^e \\ \mathbf{k}_{ji}'^e & \mathbf{k}_{jj}'^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i' \\ \mathbf{a}_j' \end{Bmatrix}. \quad (5.52)$$

Manipulando e organizando os termos das equações 5.44, 5.46, 5.47, 5.49 e 5.50, pode escrever-se o sistema de equações elementar relativamente ao sistema de eixos local como se segue:

$$\begin{Bmatrix} R_{x'i}^e \\ R_{y'i}^e \\ M_i^e \\ R_{x'j}^e \\ R_{y'j}^e \\ M_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \\ \theta_i \\ u_j' \\ v_j' \\ \theta_j \end{Bmatrix}. \quad (5.53)$$

A formulação descrita nos parágrafos anteriores diz respeito ao referencial local do elemento do tipo viga-barra. Consequentemente, para tornar possível determinar o comportamento de estruturas com diversos elementos do tipo viga-barra associados a sistemas de eixos locais distintos, é necessário converter toda essa formulação para o sistema de eixos global Oxy . Só desta forma será possível e coerente proceder à assemblagem de todos os sistemas de equações elementares para formar o sistema de equações global.

O procedimento aplicado para realizar a transformação para o sistema de eixos global é idêntico ao aplicado no caso do elemento do tipo barra genérico, descrito em detalhe na Secção 5.2.2. No sistema de eixos global, os vectores dos graus de liberdade e dos carregamentos nodais de cada nó podem escrever-se nas seguintes formas:

$$\mathbf{a}_i'^e = \mathbf{R}_i^e \mathbf{a}_i^e \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_j'^e = \mathbf{R}_j^e \mathbf{a}_j^e, \quad (5.54)$$

e

$$\mathbf{f}_i'^e = \mathbf{R}_i^e \mathbf{f}_i^e \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_j'^e = \mathbf{R}_j^e \mathbf{f}_j^e, \quad (5.55)$$

respectivamente. Os vectores das grandezas nodais no sistema global são

$$\mathbf{f}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i^e \\ \mathbf{f}_j^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{xi}^e \\ R_{yi}^e \\ M_i^e \\ R_{xj}^e \\ R_{yj}^e \\ M_j^e \end{Bmatrix} \quad (5.56)$$

e

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i^e \\ \mathbf{a}_j^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}. \quad (5.57)$$

Nas relações anteriores, $\mathbf{R}_i^e$ é a matriz de rotação dos graus de liberdade e carregamentos do nó i do sistema de eixos global para o referencial local. Uma vez que o elemento do tipo viga-barra e é retilíneo, então

$$\mathbf{R}_i^e = \mathbf{R}_j^e = \mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

Relacionando as equações 5.54 a 5.57, tem-se que

$$(\mathbf{R}^e)^T \mathbf{a}_i'^e = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{R}^e \mathbf{a}_i^e \quad \text{e} \quad (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{a}_j'^e = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{R}^e \mathbf{a}_j^e, \quad (5.59)$$

e

$$(\mathbf{R}^e)^T \mathbf{f}_i'^e = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{R}^e \mathbf{f}_i^e \quad \text{e} \quad (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{f}_j'^e = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{R}^e \mathbf{f}_j^e, \quad (5.60)$$

e uma vez que a matriz de rotação dos graus de liberdade e carregamentos é ortogonal, pode deduzir-se que

$$\mathbf{a}_i^e = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{a}_i'^e \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_j^e = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{a}_j'^e, \quad (5.61)$$

e

$$\mathbf{f}_i^e = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{f}_i'^e \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_j^e = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{f}_j'^e. \quad (5.62)$$

De forma matricial, as relações anteriores podem ser escritas como

$$\mathbf{a}^e = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}^e)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{R}^e)^T \end{bmatrix} \mathbf{a}'^e \quad (5.63)$$

e

$$\mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}^e)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{R}^e)^T \end{bmatrix} \mathbf{f}'^e, \quad (5.64)$$

em que $\mathbf{0}$ é a matriz nula de dimensão (2×2) . Designando a matriz de rotação do elemento do tipo viga-barra e por

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}^e) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{R}^e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.65)$$

recordando a relação de equilíbrio 5.51 e utilizando a expressão 5.63, pode reescrever-se a relação 5.64 na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^e &= (\mathbf{T}^e)^T \mathbf{k}'^e \mathbf{a}'^e \\ &= (\mathbf{T}^e)^T \mathbf{k}'^e \mathbf{T}^e \mathbf{a}^e \\ &= \mathbf{k}^e \mathbf{a}^e. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Consequentemente, a matriz de rigidez elementar da viga-barra no sistema de coordenadas global é

$$\mathbf{k}^e = (\mathbf{T}^e)^T \mathbf{k}'^e \mathbf{T}^e. \quad (5.67)$$

A relação matricial 5.66 pode ainda escrever-se, de forma mais extensa, como

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i^e \\ \mathbf{f}_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii}^e & \mathbf{k}_{ij}^e \\ \mathbf{k}_{ji}^e & \mathbf{k}_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i^e \\ \mathbf{a}_j^e \end{Bmatrix}, \quad (5.68)$$

em que a submatriz de rigidez global genérica $\mathbf{k}_{ij}^e$ se pode escrever da seguinte forma:

$$\mathbf{k}_{ij}^e = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{k}_{ij}'^e \mathbf{R}^e. \quad (5.69)$$

A operação de multiplicação simultânea à esquerda pela matriz $(\mathbf{R}^e)^T$ e à direita pela matriz $(\mathbf{R}^e)$ corresponde à aplicação de uma rotação no plano do elemento à submatriz $\mathbf{k}_{ij}'^e$. Efectuando esta operação de rotação, indicada na equação 5.69, a matriz de rigidez elementar no sistema de eixos global pode ser reescrita, de forma extensa, como

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} A & B & C & -A & -B & C \\ B & D & E & -B & -D & E \\ C & E & F & -C & -E & G \\ -A & -B & -C & A & B & -C \\ -B & -D & -E & B & D & -E \\ C & E & G & -C & -E & F \end{bmatrix}^e, \quad (5.70)$$

em que

$$\begin{cases} A = \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \alpha \\ B = \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha \\ C = -\frac{6EI}{l^2} \sin \alpha \\ D = \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha \\ E = \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha \\ F = \frac{4EI}{l} \\ G = \frac{2EI}{l} \end{cases}. \quad (5.71)$$

Note-se que, mais uma vez, o procedimento de assemblagem dos sistemas de equações elementares para formar o sistema de equações global é em tudo idêntico ao descrito na Secção 4.2.

Exercício 5.4. A estrutura reticulada plana representada na Figura 5.13 é constituída por dois elementos do tipo viga-barra em perfil IPN 120.

montados na posição mais resistente (momento de inércia $I = 328 \text{ cm}^4$ e área de secção transversal $A = 14,2 \text{ cm}^2$). Todas as peças da estrutura são de aço com módulo de elasticidade $E = 200 \text{ GPa}$. Considere que $L = 2000 \text{ mm}$, $F = 10 \text{ kN}$ e que o efeito do peso próprio da estrutura não é relevante. Determine os valores desconhecidos de deslocamento e de rotação nos pontos A , B e C , e calcule os esforços de reacção nos apoios.

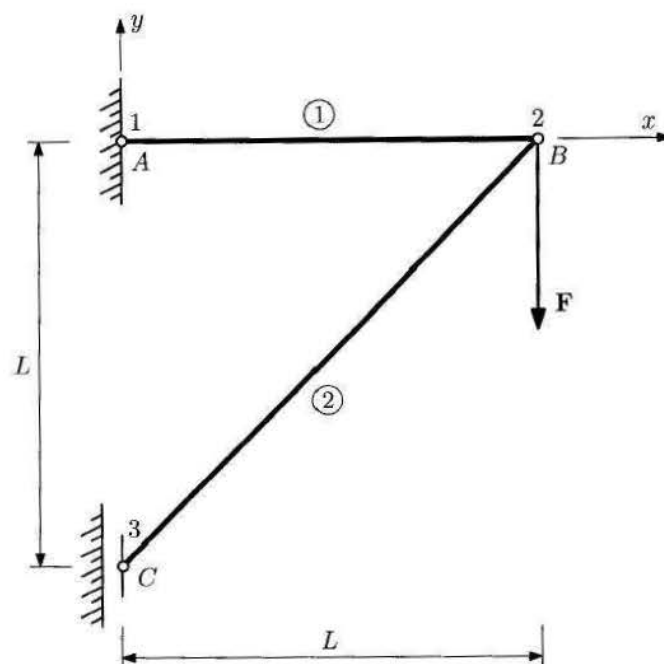


Figura 5.13 Estrutura reticulada plana, constituída por dois elementos do tipo viga-barra e correspondente malha de elementos finitos, para o Exercício 5.4.

Resolução

A conectividade e as características da estrutura reticulada são as que se indicam na Tabela 5.4.

Recorrendo à expressão 5.70 e aos dados indicados na Tabela 5.4 podem construir-se as matrizes de rigidez elementares dos dois elementos da estrutura, obtendo-se

Tabela 5.4 Conectividade e características da estrutura reticulada plana para o Exercício 5.4.

Elemento	Nós	Comprimento	Orientação	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin^2 \alpha$	$\cos^2 \alpha$
1	1, 2	L	$\alpha = 0^\circ$	0	1	0	1
2	2, 3	$\sqrt{2}L$	$\alpha = -135^\circ$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	1/2

$$\mathbf{k}^1 = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{L^2} & \frac{6I}{L} & 0 & -\frac{12I}{L^2} & \frac{6I}{L} \\ 0 & \frac{6I}{L} & 4I & 0 & -\frac{6I}{L} & 2I \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{L^2} & -\frac{6I}{L} & 0 & \frac{12I}{L^2} & -\frac{6I}{L} \\ 0 & \frac{6I}{L} & 2I & 0 & -\frac{6I}{L} & 4I \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{k}^2 = \frac{E}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} \frac{A}{2} + \frac{3I}{L^2} & \frac{A}{2} - \frac{3I}{L^2} & \frac{3I}{L} & -\frac{A}{2} - \frac{3I}{L^2} & -\frac{A}{2} + \frac{3I}{L^2} & \frac{3I}{L} \\ \frac{A}{2} - \frac{3I}{L^2} & \frac{A}{2} + \frac{3I}{L^2} & -\frac{3I}{L} & -\frac{A}{2} + \frac{3I}{L^2} & -\frac{A}{2} - \frac{3I}{L^2} & -\frac{3I}{L} \\ \frac{3I}{L} & -\frac{3I}{L} & 4I & -\frac{3I}{L} & \frac{3I}{L} & 2I \\ -\frac{A}{2} - \frac{3I}{L^2} & -\frac{A}{2} + \frac{3I}{L^2} & -\frac{3I}{L} & \frac{A}{2} + \frac{3I}{L^2} & \frac{A}{2} - \frac{3I}{L^2} & -\frac{3I}{L} \\ -\frac{A}{2} + \frac{3I}{L^2} & -\frac{A}{2} - \frac{3I}{L^2} & \frac{3I}{L} & \frac{A}{2} - \frac{3I}{L^2} & \frac{A}{2} + \frac{3I}{L^2} & \frac{3I}{L} \\ \frac{3I}{L} & -\frac{3I}{L} & 2I & -\frac{3I}{L} & \frac{3I}{L} & 4I \end{bmatrix}.$$

Note-se que, uma vez que a orientação do sistema de eixos local do elemento 1 é a mesma do sistema de eixos global, a matriz de rigidez daquele elemento resulta precisamente igual à matriz de rigidez genérica do sistema de equações 5.53.

Uma vez construídos os sistemas de equações elementares, procede-se à montagem do sistema global de equações $\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{a}$ de acordo com a conectividade da malha indicada na Tabela 5.4. A estrutura tem nove graus de liberdade — duas componentes de deslocamento e uma componente de rotação por nó. Consequentemente, a matriz do sistema global de equações tem dimensão (9×9) . Introduzindo as condições de fronteira do problema, o vector dos deslocamentos e das rotações nodais — os graus de liberdade do sistema — resulta em

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ 0 \\ v_3 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

em que u_i e v_i são as componentes de deslocamento horizontal e vertical no nó i , respectivamente, e θ_i é a rotação no nó i . Por outro lado, o vector dos esforços nodais é o seguinte:

$$\begin{Bmatrix} U_1^1 \\ V_1^1 \\ M_1^1 \\ U_2^1 + U_2^2 \\ V_2^1 + V_2^2 \\ M_2^1 + M_2^2 \\ U_3^2 \\ V_3^2 \\ M_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H^1 \\ V^1 \\ M^1 \\ 0 \\ -F \\ 0 \\ H^3 \\ 0 \\ M^3 \end{Bmatrix},$$

em que U_i^e e V_i^e são as contribuições de esforço horizontal e vertical do elemento e no nó i , respectivamente, e M_i^e é a contribuição de momento flector do elemento e no nó i . Deste modo, eliminando as equações correspondentes aos graus de liberdade nulos (equações dos graus de liberdade 1, 2, 3, 7 e 9) e as respectivas colunas no sistema de equações global, obtém-se o sistema de equações reduzido de dimensão (4×4) , cuja matriz é

$$\frac{E}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} \frac{(1+2\sqrt{2})A}{2} + \frac{3I}{L^2} & \frac{A}{2} - \frac{3I}{L^2} & \frac{3I}{L} & -\frac{A}{2} + \frac{3I}{L^2} \\ \frac{A}{2} - \frac{3I}{L^2} & \frac{A}{2} + \frac{(3+12\sqrt{2})I}{L^2} & -\frac{(3+6\sqrt{2})I}{L} & -\frac{A}{2} - \frac{3I}{L^2} \\ \frac{3I}{L} & -\frac{(3+6\sqrt{2})I}{L} & (4+4\sqrt{2})I & \frac{3I}{L} \\ -\frac{A}{2} + \frac{3I}{L^2} & -\frac{A}{2} - \frac{3I}{L^2} & \frac{3I}{L} & \frac{A}{2} + \frac{3I}{L^2} \end{bmatrix}.$$

Substituindo os valores e resolvendo o sistema de equações global obtêm-se os seguintes valores para os deslocamentos e rotações nodais desconhecidos:

$$\begin{cases} u_2 = 0,039 \text{ mm} \\ v_2 = -18,2 \text{ mm} \\ \theta_2 = -8,0 \text{ mrad} \\ v_3 = -18,1 \text{ mm} \end{cases}$$

Os esforços de reacção no apoio *A* determinam-se reescrevendo as equações dos graus de liberdade 1 e 2 do sistema global de equações, isto é,

$$H^1 = -\frac{EA}{L}u_2 = -5,52 \text{ kN},$$

$$V^1 = -\frac{12EI}{L^3}v_2 + \frac{6EI}{L^2}\theta_2 = 10 \text{ kN}$$

e

$$M^1 = -\frac{6EI}{L^2}v_2 + \frac{2EI}{L}\theta_2 = 12,62 \text{ kNm}.$$

Por outro lado, a reacção horizontal no apoio *C* calcula-se recorrendo à equação 7 do sistema global, correspondente ao grau de liberdade de deslocamento horizontal do nó 3, resultando

$$H^3 = \left(-\frac{EA}{2\sqrt{2}L} - \frac{3EI}{\sqrt{2}L^3}\right)u_2 + \left(-\frac{EA}{2\sqrt{2}L} + \frac{3EI}{\sqrt{2}L^3}\right)v_2 - \frac{3EI}{\sqrt{2}L^2}\theta_2$$

$$+ \left(\frac{EA}{2\sqrt{2}L} - \frac{3EI}{\sqrt{2}L^3}\right)v_3 = 5,52 \text{ kN}.$$

De modo semelhante, o momento de reacção no apoio *C* obtém-se recorrendo à equação 9 do sistema global, sendo

$$M^3 = \frac{3EI}{\sqrt{2}L^2}u_2 - \frac{3EI}{\sqrt{2}L^2}v_2 + \frac{2EI}{\sqrt{2}L}\theta_2 + \frac{3EI}{\sqrt{2}L^2}v_3 = -3,66 \text{ kNm}.$$

Uma vez que a estrutura é isostática, os valores calculados para as reacções nos apoios *A* e *C* podem facilmente ser verificados recorrendo às equações de equilíbrio da estrutura nas direcções horizontal e vertical.

Referências Bibliográficas

1. Bathe, K.-J. *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Nova Jérsea, Estados Unidos da América, 1996.

2. Crisfield, M.A. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures — Essentials*, Vol. 1, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido, 1996.
3. Fish, J., Belytschko T. *A First Course in Finite Elements*, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido, 2007.
4. Hughes, T.J.R. *The Finite Element Method — Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2000.
5. Oñate, E. *Structural Analysis with the Finite Element Method — Linear Statics: Basis and Solids*, Vol. 1, Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences, Springer-Verlag, Berlin, Alemanha, 2009.
6. Reddy, J.N. *An Introduction to the Finite Element Method*, 3.^a edição, McGraw-Hill, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2005.
7. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method — The Basis*, Vol. 1, 5.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2000.
8. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method — Solid Mechanics*, Vol. 2, 5.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2000.

Parte III

Análise de Meios Contínuos

Resumo Neste capítulo apresentam-se os conhecimentos necessários para a aplicação do método dos elementos finitos (MEF) em domínios contínuos com uma, duas ou três dimensões. São introduzidos os conceitos de formulação forte e formulação fraca, bem como de condições de fronteira essenciais e condições de fronteira naturais de um problema genérico. Através de exemplos práticos de análise estrutural e análise térmica, são dados os passos necessários para a discretização por elementos finitos de um domínio contínuo e a respectiva transformação das equações diferenciais que constituem a formulação fraca num sistema de equações algébricas. Finalmente, são discutidas as condições necessárias e as condições suficientes para a continuidade das funções de aproximação a utilizar no âmbito do MEF.

6.1 Introdução

Apesar de a utilização do método dos elementos finitos na determinação do comportamento de sistemas discretos ter aplicação directa nas áreas do cálculo estrutural, a utilização deste método numérico não se cinge à análise de sistemas discretos, tais como, por exemplo, os descritos no Capítulo 5. De facto, apesar de tais áreas constituírem um dos campos de aplicação mais populares do MEF, este método pode ser generalizado, de forma a cobrir a análise do comportamento de meios contínuos. Deste modo, permite-se a sua aplicação na determinação da solução de problemas que envolvam situações tão diversas como, por exemplo, as análises térmica, electrostática ou do escoamento de fluidos.

A solução matemática da esmagadora maioria dos problemas de engenharia com significado físico tangível passa pela determinação de um conjunto de incógnitas que representam variáveis físicas (temperaturas, deslocamentos, pressões, velocidades, *etc.*). Estas variáveis são os graus de liberdade do problema e, sem perda de generalidade, passarão a ser representadas pelo vector $\mathbf{u}$ no tratamento de problemas de meios contínuos, de modo a distinguir o presente contexto do tratamento utilizado nos meios discretos, apresentados no Capítulo 5.

O comportamento do sistema físico é então representado matematicamente por um conjunto de equações diferenciais que podem ser definidas como

$$\mathbf{X}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} X_1(\mathbf{u}) \\ X_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ X_n(\mathbf{u}) \end{Bmatrix}. \quad (6.1)$$

Para completar a definição do problema é ainda necessário definir um conjunto de condições de fronteira como o que se segue:

$$\mathbf{y}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} y_1(\mathbf{u}) \\ y_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ y_m(\mathbf{u}) \end{Bmatrix}. \quad (6.2)$$

O conjunto formado pelas equações diferenciais $\mathbf{X}(\mathbf{u})$ e pelas condições de fronteira $\mathbf{y}(\mathbf{u})$ constitui a designada formulação forte (ou formulação clássica) de um problema. A solução deste problema é o conjunto de incógnitas (o vector $\mathbf{u}$) que satisfaz simultaneamente as n equações diferenciais e as m condições de fronteira num domínio genérico Ω e na sua fronteira Γ , respectivamente. Na Figura 6.1 pode ver-se uma representação esquemática do domínio genérico Ω e da respectiva fronteira Γ .

A resolução de sistemas de equações diferenciais pode envolver procedimentos de alguma complexidade matemática. Adicionalmente, estes procedimentos são naturalmente morosos. Como foi referido anteriormente, o objectivo principal dos métodos numéricos de aproximação, de entre os quais se destaca o método dos elementos finitos, é o de transformar um conjunto de equações diferenciais, que caracterizam um fenómeno físico, num sistema de equações algébricas de fácil resolução. Este processo consegue-se através da divisão em subdomínios — discretização — do domínio contínuo do problema que se pretende resolver.

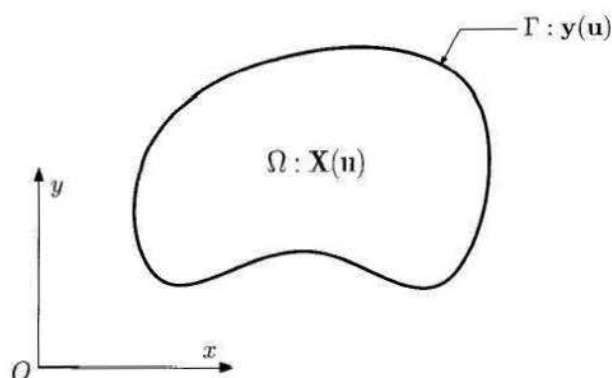


Figura 6.1 Representação esquemática do domínio genérico Ω e da respectiva fronteira Γ .

Em alguns métodos numéricos de aproximação, tal como é o caso do método das diferenças finitas (MDF), que será descrito no Capítulo 11, a discretização do problema pode ser feita directamente a partir da sua formulação forte. Tal significa que as equações diferenciais e as condições de fronteira que descrevem o problema são directamente transformadas em equações algébricas, através de procedimentos de linearização e de expansão polinomial.

No caso do método dos elementos finitos, é sempre necessário um passo adicional que corresponde à transformação da formulação forte de um problema na sua formulação fraca equivalente. Em termos genéricos, a obtenção da formulação fraca passa por reduzir a ordem das derivadas presentes nas equações diferenciais que definem a formulação forte do problema. Uma vez obtida a formulação fraca, a aplicação de funções de aproximação completa o conjunto de passos necessários para aplicar eficazmente o MEF. Como se verá mais à frente, no MEF estas funções de aproximação são genericamente designadas por funções de forma. No quadro seguinte são descritos, de forma resumida, os diversos passos envolvidos na aplicação do método dos elementos finitos a problemas de meios contínuos.

Generalização do método dos elementos finitos

1. Divide-se o domínio contínuo recorrendo a pontos, linhas, superfícies e/ou volumes, gerando um conjunto de elementos finitos. Estes são interligados através de nós, onde se concentram as incógnitas primárias do problema, tais como, por exemplo, os deslocamentos em problemas estru-

turais, as temperaturas em problemas térmicos, *etc.* Esta fase designa-se por discretização.

2. A formulação forte do problema é convertida na correspondente formulação fraca.
3. É escolhido um conjunto de funções matemáticas de aproximação que verifiquem quer a formulação forte quer a formulação fraca do problema.
4. Determinam-se as matrizes de rigidez elementares e a matriz de rigidez global, bem como os vectores globais de deslocamentos e de forças externas.
5. Resolve-se o sistema global de equações sujeito às condições de fronteira do problema, obtendo-se o vector de incógnitas nodais. Determina-se assim a solução aproximada do problema.

Conforme se pode constatar, estas etapas são semelhantes às descritas no Capítulo 5, referente à análise matricial de sistemas discretos.

Nas secções seguintes, demonstra-se como o método dos elementos finitos pode ser aplicado quer na discretização de domínios contínuos quer na resolução de problemas distintos dos relacionados com o cálculo de forças e de deslocamentos, como é o caso dos problemas de mecânica estrutural.

6.2 Problemas unidimensionais

Para exemplificar e concretizar o que foi exposto na secção anterior, considere-se um exemplo prático simples. O objectivo do exemplo que se pretende formular é determinar o campo de deslocamentos de uma barra de secção transversal circular, de área variável, construída num material com comportamento linear elástico. Esta barra encontra-se representada esquematicamente na Figura 6.2(a). Este problema pode ser considerado como unidimensional. Tal significa que, na prática, o domínio genérico Ω da Figura 6.1 se pode converter numa simples linha que representa a barra. A fronteira Γ é representada pelos pontos correspondentes às extremidades da barra, como se pode ver na Figura 6.2(b).

Aplica-se um esforço de compressão na direcção axial da barra e pretende-se determinar a solução aproximada para os campos de deslocamentos, de defor-

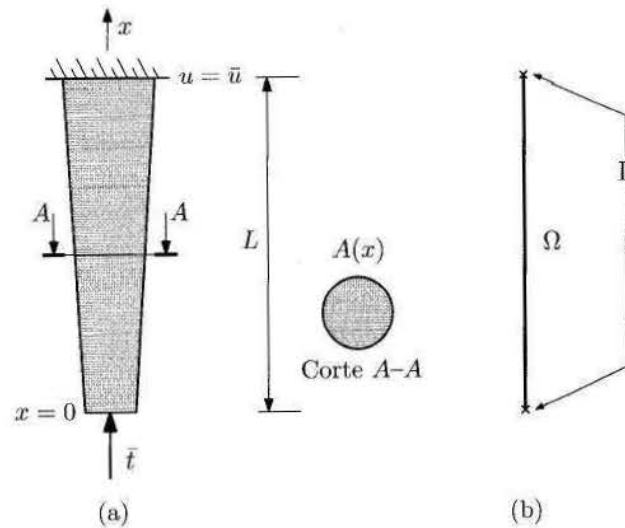


Figura 6.2 (a) Barra de secção transversal variável e (b) domínio unidimensional Ω e respectiva fronteira Γ .

mações e de tensões em toda a barra. Considera-se, naturalmente, que a barra se encontra em equilíbrio estático. A equação diferencial parcial que rege o problema pode ser facilmente determinada, correspondendo a

$$\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + b = 0, \quad \forall x \in]0, L[, \quad (6.3)$$

em que A é a área da secção transversal, que varia ao longo da barra, E é o módulo de Young do material e b (sendo, neste caso, $b < 0$) é a força volúmica de acção gravítica que actua em todo o corpo deformável Ω , isto é, em toda a barra.

Numa primeira abordagem à resolução deste problema, é necessário definir condições de fronteira nas extremidades da barra — a fronteira Γ do domínio. Assim, na extremidade inferior da barra ($x = 0$) encontra-se aplicada uma força superficial de compressão prescrita $\bar{t}$. Recorde-se que os valores prescritos num determinado domínio são designados pela utilização de uma barra superior nos correspondentes caracteres. No extremo oposto da barra ($x = L$) o deslocamento é prescrito e igual a $\bar{u}$. De forma mais compacta pode dizer-se que

$$\begin{cases} \left(E \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} = -\bar{t} \\ u(x=L) = \bar{u} \end{cases} \quad (6.4)$$

Deste modo, o conjunto formado pela equação diferencial 6.3 e pelas condições de fronteira definidas nas relações 6.4 caracteriza a formulação forte relativa à resposta mecânica de uma barra de secção transversal variável sujeita a uma força volumica de acção gravítica e a uma solicitação axial de compressão.

6.2.1 Da formulação forte à formulação fraca

Conforme se referiu no início deste capítulo, no âmbito do método dos elementos finitos, é crucial transformar a formulação forte de um problema na formulação fraca correspondente. Na prática, pretende-se reduzir a ordem máxima das derivadas parciais das equações que regem o problema. Para além de possibilitar uma aplicação sistemática do método dos elementos finitos, o uso de formulações fracas tem como consequência adicional a possibilidade de se obterem matrizes de rigidez simétricas. Ora este facto traz vantagens evidentes, em termos de custos computacionais, sempre que se pretende resolver os sistemas de equações algébricas finais.

Para levar a cabo esta etapa são apenas necessários conhecimentos elementares de cálculo diferencial e cálculo integral. Recorde-se a regra de integração por partes, que não é mais do que uma manifestação equivalente da regra da derivada de um produto de funções.

Integração por partes

Considerem-se as funções $f(x)$ e $g(x)$, ambas diferenciáveis e com derivadas contínuas em x . A derivada do seu produto é

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx}g. \quad (6.5)$$

Reorganizando as parcelas da equação anterior, obtém-se

$$f \frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(fg) - \frac{df}{dx}g. \quad (6.6)$$

Integrando todas as parcelas em ambos os membros da equação 6.6 obtém-se a relação correspondente à regra de integração por partes:

$$\int f \frac{dg}{dx} dx = \int \frac{d}{dx}(fg) dx - \int \frac{df}{dx}g dx, \quad (6.7)$$

isto é,

$$\int f \frac{dg}{dx} dx = fg - \int \frac{df}{dx} g dx. \quad (6.8)$$

Recorrendo à regra de integração por partes é possível definir a formulação fraca do problema. Para tal, introduz-se uma função arbitrária $w(x)$. Esta função poderá também, em certos casos particulares, ser designada por função de peso. Assim, para além da função de teste ou função candidata à solução $u(x)$, a formulação fraca também contém a função $w(x)$.

Multiplicando a equação que compõe a formulação forte do problema pela função $w(x)$ e integrando o resultado em todo o domínio, obtém-se

$$\int_0^L w(x) \left[\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + b \right] dx = 0, \quad \forall w(x), \quad (6.9)$$

para a equação diferencial 6.3. Para a condição de fronteira de força superficial definida na relação 6.4, pode definir-se que

$$w(0) A(0) \left[E \frac{du}{dx} + t \right]_{x=0} = 0, \quad \forall w(x). \quad (6.10)$$

Note-se que o facto de o operador integral não aparecer na equação anterior se deve à particularidade de esta relação dizer respeito, unicamente, à extremidade inferior da barra, ou seja, ao domínio em que $x = 0$. Por outro lado, a condição de fronteira para o deslocamento prescrito na extremidade superior da barra ($x = L$) pode ser ignorada, bastando, para tal, que se considere que todas as funções de peso satisfazem a condição $w(L) = 0$.

Por uma questão de conveniência, separam-se as parcelas do membro esquerdo da equação 6.9, isto é,

$$\int_0^L w(x) \left[\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) \right] dx + \int_0^L w(x) b dx = 0. \quad (6.11)$$

Recorrendo à notação simplificada $w(x) = w$, realizando a mudança de variáveis

$$\begin{cases} f = w \\ g = AE \frac{du}{dx} \end{cases}$$

na regra de integração por partes (ver equação 6.8) e aplicando o resultado à primeira parcela do primeiro termo da equação 6.11, obtém-se

$$\int_0^L w \left[\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) \right] dx = \left(w AE \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} dx, \quad (6.12)$$

em que a consideração da fronteira na primeira parcela do segundo termo da equação anterior decorre do primeiro teorema fundamental do cálculo. De facto, para uma qualquer função $f(x)$ com primeira derivada contínua em $[a, b]$, tem-se que

$$\int_a^b \frac{df(x)}{dx} dx = f(x) \Big|_a^b. \quad (6.13)$$

Uma vez que o problema é unidimensional e assumindo que o material de que é construída a barra tem um comportamento linear elástico, ou seja, que pode ser representado pela lei de Hooke, tem-se que

$$E \frac{du}{dx} = \sigma.$$

Então, a primeira parcela do segundo membro da equação 6.12 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left(w AE \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^L = (w A \sigma) \Big|_{x=L} - (w A \sigma) \Big|_{x=0}. \quad (6.14)$$

Substituindo as equações 6.14 e 6.12 na relação 6.11, que define todo o problema em estudo, chega-se a

$$(w A \sigma) \Big|_{x=L} - (w A \sigma) \Big|_{x=0} - \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} \right) dx + \int_0^L w b dx = 0. \quad (6.15)$$

Atendendo à equação 6.10 e a que $w(L) = 0$, obtém-se a expressão final que define a formulação fraca do problema em estudo, ou seja,

$$\int_0^L \left(\frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} \right) dx = \int_0^L w b dx + w(0) A(0) \bar{t} = 0. \quad (6.16)$$

O integral no primeiro membro da equação 6.16 opera unicamente derivadas de primeira ordem da função candidata $u(x)$ e da função de peso $w(x)$. Note-se que na formulação forte aparecem derivadas de segunda ordem da função $u(x)$.

Na dedução das equações de elementos finitos, será possível verificar como uma escolha conveniente das funções $w(x)$ e $u(x)$ conduz à formação de matrizes de rigidez simétricas e, por conseguinte, a sistemas de equações algébricas de mais fácil resolução.

O termo *formulação fraca* aplica-se, de um modo geral, a qualquer tipo de problema, seja ele, por exemplo, de áreas da Física, da Matemática ou da Engenharia. Todavia, na linguagem clássica da mecânica estrutural, formulações deste tipo são frequentemente designadas por Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Analogamente, a equação final do problema é designada por Equação dos Trabalhos Virtuais (ETV).

Neste ponto recorde-se que a formulação fraca é satisfeita para qualquer função de peso $w(x)$ verificando $w(L) = 0$. Por outro lado, a solução do problema consiste na determinação da função candidata $u(x)$ que satisfaça, simultaneamente, quer a condição de fronteira $u(L) = \bar{u}$ quer a relação 6.16. Todo o procedimento descrito nos parágrafos anteriores pode resumir-se do seguinte modo:

Formulação fraca

Determinar a função u que satisfaz a condição de fronteira $u(L) = \bar{u}$ e a equação

$$\int_0^L \left(\frac{dw}{dx} A E \frac{du}{dx} \right) dx = \int_0^L w b dx + w(0) A(0) t = 0, \quad \forall w, \text{ com } w(L)=0. \quad (6.17)$$

6.2.2 Continuidade

Neste ponto importa referir que as designações *formulação forte* e *formulação fraca* se relacionam com o grau de continuidade que cada formulação exige para as funções que constituem a solução do problema. Para satisfazer uma formulação fraca que contenha derivadas de primeira ordem, tal como no caso descrito anteriormente, quer a função de peso $w(x)$ quer a função candidata $u(x)$ deverão ter a primeira derivada integrável, mas não-nula. Da mesma forma, a formulação forte equivalente para o mesmo problema exigiria funções admitindo segunda derivada integrável, mas não-nula.

Uma função contínua com (primeira) derivada descontínua é designada por função com continuidade C^0 . Por outro lado, uma função contínua com (primeira) derivada contínua e segunda derivada descontínua possui continuidade C^1 . Generalizando este conceito, uma função possui continuidade C^n quando todas as suas derivadas até à ordem n são contínuas, mas a sua derivada de ordem $n + 1$ é descontínua. Deste modo, uma função que apresente uma derivada de ordem n constituída por uma associação (contínua) de segmentos de recta com declives distintos corresponde a um exemplo de função com continuidade C^n . Neste caso, a sua derivada de ordem $n + 1$ apresenta descontinuidades pontuais correspondentes a “saltos” abruptos entre subdomínios em que é constante. Não obstante, tais descontinuidades não impedem que esta derivada seja integrável em todo o seu domínio. Neste contexto, no caso de uma função ter continuidade C^0 , a sua (primeira) derivada apresentará descontinuidades pontuais, correspondendo, assim, a uma função com continuidade C^{-1} (ver Figura 6.3). A integrabilidade de funções com continuidade C^{-1} torna admissível a utilização de funções com continuidade C^0 para aproximar a função de peso e a função candidata de problemas em cujas formulações fracas surjam apenas as primeiras derivadas destas funções, tal como se verifica na expressão 6.17. Nesta situação, tal significa que o campo de deslocamento u tem continuidade C^0 , pelo que o campo de deformação — definido com base na primeira derivada do deslocamento — possui continuidade C^{-1} .

Na Figura 6.3 mostram-se exemplos de funções genéricas com continuidades C^{-1} , C^0 e C^1 . Devido à simplicidade das funções com continuidade C^0 , este tipo de funções é usualmente utilizado na resolução de problemas com base no método dos elementos finitos, como se poderá constatar nos próximos capítulos.

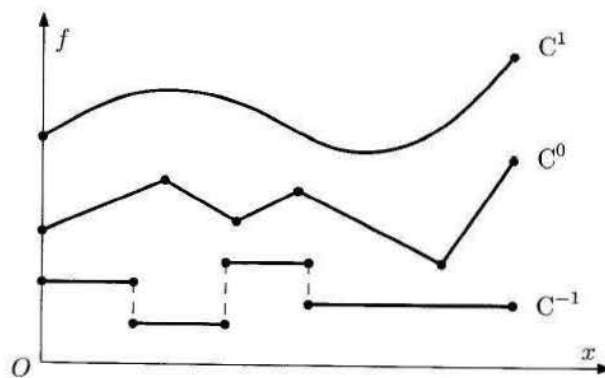


Figura 6.3 Exemplos de funções f genéricas com continuidades C^{-1} , C^0 e C^1 .

Note-se que a aplicação do método dos elementos finitos em formulações contendo equações diferenciais de ordem superior (tal como, por exemplo, as presentes na formulação forte descrita pela equação 6.3) será sempre possível. Porém, nestes casos exige-se a escolha de funções de teste ou de funções de peso que possuam continuidades de ordem superior. Utilizando neste caso uma formulação fraca, obter-se-ão também matrizes de rigidez simétricas. No entanto, no caso de se considerar a formulação forte, a escolha de funções de teste que admitem derivadas superiores resultará em matrizes de rigidez não-simétricas que, naturalmente, levam a uma redução da eficácia computacional do método. Todavia, é importante salientar que qualquer função $u(x)$ que seja solução da formulação fraca de um determinado problema é, também, solução da formulação forte equivalente. Este é um requisito fundamental de toda a teoria do MEF, que pode ser demonstrado através de equações de equivalência entre as duas formulações.

6.2.3 Generalização das condições de fronteira

O exemplo unidimensional apresentado nas secções anteriores pode ser generalizado à grande maioria dos problemas unidimensionais de análise estrutural, nomeadamente aos problemas em que o comportamento dos materiais é linear elástico. Para tal, basta que as condições de fronteira, prescritas nas extremidades da barra — a fronteira Γ —, passem a ser arbitrárias. Assim, por conveniência de notação, a fronteira Γ é dividida nas partes de fronteira Γ_u e Γ_t .

Como a própria notação sugere, na parte de fronteira Γ_u prescrevem-se valores do campo de deslocamentos $\mathbf{u}$ (no caso presente, do escalar u). Tais condições de fronteira, que são aplicadas sobre a incógnita primária do problema, devem ser obrigatoriamente satisfeitas pela função de teste. Por esta razão, são denominadas condições de fronteira essenciais do problema. Por outro lado, na parte da fronteira Γ_t prescrevem-se valores da derivada da função incógnita primária do problema, que, no caso presente, correspondem às deformações e, com base na lei de Hooke, às tensões.

Como se pôde comprovar na secção anterior, tais condições de fronteira são sempre naturalmente consideradas após a determinação da formulação fraca do problema (recorde-se a equação 6.15). Por esta razão, estas condições de fronteira são designadas por condições de fronteira naturais do problema. Note-se que, como facilmente se compreenderá, as condições de fronteira naturais e as

condições de fronteira essenciais nunca poderão estar aplicadas num mesmo grau de liberdade de um ponto do domínio, isto é, estas condições são mutuamente exclusivas. No entanto, são condições de fronteira complementares, já que o seu conjunto perfaz a totalidade das condições de fronteira de um problema. Assim, em termos dos graus de liberdade, tem-se que

$$\begin{cases} \Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma \\ \Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset \end{cases} \quad (6.18)$$

Generalizando o exemplo da barra unidimensional para qualquer valor prescrito na sua fronteira Γ , pode obter-se a formulação forte definida pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + b = 0, \quad \forall x \in]0, L[, \quad (6.19)$$

e pelas condições de fronteira

$$\begin{cases} \sigma n = nE \frac{du}{dx} = \bar{t} & \text{em } \Gamma_t \\ u = \bar{u} & \text{em } \Gamma_u \end{cases} \quad (6.20)$$

Por comparação directa com a formulação forte do caso particular apresentado nas equações 6.3 e 6.4, pode verificar-se que as condições de fronteira, quer a respeitante ao deslocamento (condição de fronteira essencial) quer a relacionada com a tensão imposta (condição de fronteira natural), são agora arbitrárias. Note-se ainda a inclusão do escalar $n \in \{-1, +1\}$ nas condições de fronteira naturais na equação 6.20, com o qual se torna possível aplicar tensões de tracção ($\sigma > 0$) ou de compressão ($\sigma < 0$) nos extremos da barra. Às extremidades inferior e superior da barra correspondem valores de n iguais a -1 e $+1$, respectivamente (ver Figura 6.2). Assim, os valores de força superficial prescrita podem ser obtidos, de acordo com a expressão 6.20, com base na relação

$$\bar{t} = \sigma n. \quad (6.21)$$

Atenda-se a que $\bar{t}$ é positivo quando tem o sentido positivo de Ox e negativo no caso contrário.

A derivação da formulação fraca do problema genérico assemelha-se em tudo ao que foi exposto na Secção 6.2.1. Consequentemente, repetir-se-á todo o processo de multiplicação pela função de peso arbitrária $w(x)$ e integração das

equações da formulação forte (equações 6.19 e 6.20) em todo o seu domínio Ω e respectiva fronteira Γ_t , obtendo-se

$$\int_{\Omega} w \left[\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + b \right] dx = 0, \quad \forall_{w(x)}, \quad (6.22)$$

e

$$\left[wA(\sigma n - \bar{t}) \right] \Big|_{\Gamma_t} = 0, \quad \forall_{w(x)}. \quad (6.23)$$

Para garantir a compatibilidade desta formulação com a formulação forte do problema, as funções de peso $w(x)$ a utilizar deverão ainda satisfazer a condição $w = 0$ em toda a fronteira Γ_u . Adicionalmente, a função candidata à solução $u(x)$ deverá respeitar também a condição de fronteira $u = \bar{u}$ em Γ_u . Realizando a integração por partes e combinando o resultado com as condições de fronteira da formulação forte, obtém-se

$$\underbrace{(wA\sigma n) \Big|_{\Gamma_u}}_{=0} + (wA\bar{t}) \Big|_{\Gamma_t} - \int_{\Omega} \left(\frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} \right) dx + \int_{\Omega} w b dx = 0. \quad (6.24)$$

Para chegar à formulação anterior, omitiram-se intencionalmente alguns passos intermédios, dada a similaridade com o exemplo descrito na Secção 6.2.1. Sugere-se, no entanto, que o leitor realize a dedução completa das equações.

Na equação 6.24 desaparece o termo relativo às condições de fronteira essenciais uma vez que, em Γ_u , a função $w = 0$. Deste modo, a formulação fraca para um problema genérico unidimensional de análise estrutural é a seguinte:

Formulação fraca

Determinar a função u que satisfaz a condição de fronteira

$$u \Big|_{\Gamma_u} = \bar{u}$$

e a equação

$$\int_{\Omega} \left(\frac{dw}{dx} AE \frac{du}{dx} \right) dx = \int_{\Omega} w b dx + (wA\bar{t}) \Big|_{\Gamma_t}, \quad \forall_w, \text{ com } w=0 \text{ em } \Gamma_u. \quad (6.25)$$

Pode facilmente verificar-se a semelhança desta formulação generalizada com a equação 6.17, bem como a simetria do primeiro integral presente na equação 6.25. Como se poderá verificar na secção seguinte, após uma aplicação conveniente das equações de elementos finitos, tal simetria tem como consequência directa o facto de as matrizes de rigidez serem também simétricas.

6.2.4 Discretização em elementos finitos

As funções $u(x)$ e $w(x)$ presentes na formulação fraca deduzida nas secções anteriores deverão, naturalmente, ser aproximadas de forma a obter um sistema de equações associadas a um problema de elementos finitos. No que se segue, o índice superior h será utilizado para designar todas as variáveis que sejam aproximadas. A escolha desta notação para funções ou variáveis discretizadas tem como objectivo manter a coerência com a notação adoptada em outras fontes bibliográficas relacionadas com o método dos elementos finitos. Deste modo, considerando toda a extensão do domínio unidimensional do problema, representado na Figura 6.2(b), a função $u(x)$ que representa a solução da formulação fraca pode ser aproximada do seguinte modo:

$$u(x) \approx u^h(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{d}, \quad (6.26)$$

em que $\mathbf{d}$ representa um vector que contém os deslocamentos nodais de todos os elementos finitos que discretizam o domínio unidimensional contínuo. Naturalmente, o número de deslocamentos nodais a determinar depende directamente do número de nós e, consequentemente, dos elementos escolhidos para se discretizar a geometria contínua do problema. Por outro lado, a matriz $\mathbf{N}$ agrupa as funções de forma, isto é, de interpolação, que dependem do elemento finito considerado.

Para os casos mais simples, a escolha de elementos e funções de forma recai, frequentemente, sobre o elemento finito unidimensional de dois nós. Todavia, este é um tema que será aprofundado e estudado em detalhe noutros capítulos deste livro, nomeadamente no Capítulo 7. Foque-se, de momento, a atenção na obtenção da forma matricial do sistema de equações discretas a partir da formulação fraca de um problema. Para levar a cabo esta tarefa, o passo seguinte na metodologia do método dos elementos finitos é a discretização do domínio contínuo do problema em subdomínios — os elementos finitos. Neste sentido, todas as variáveis discretizadas que digam respeito a um determinado elemento finito são afectadas do índice superior e . Dentro de cada elemento finito, a função

candidata $u^e(x)$ poderá ser aproximada recorrendo às funções de forma, isto é,

$$u^e(x) = \mathbf{N}^e(x) \mathbf{d}^e, \quad (6.27)$$

em que $\mathbf{N}^e(x)$ e $\mathbf{d}^e$ representam a matriz das funções de forma e o vector de incógnitas nodais do elemento finito genérico e , respectivamente.

Retomando a relação 6.25, torna-se necessário determinar a derivada aproximada da função $u^e(x)$. Agrupando as derivadas das funções de forma numa matriz, que se designa frequentemente por matriz $\mathbf{B}$, é possível escrever que

$$\frac{du^e(x)}{dx} = \frac{d\mathbf{N}^e(x)}{dx} \mathbf{d}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{d}^e. \quad (6.28)$$

Um estudo mais detalhado sobre a constituição da matriz $\mathbf{B}$ será apresentado nos capítulos seguintes.

No que diz respeito à função de peso $w(x)$, o processo mais expedito para a sua aproximação passa por recorrer às mesmas funções de forma utilizadas na aproximação da função $u(x)$, ou seja,

$$w^e = \mathbf{N}^e \mathbf{w}^e, \quad (6.29)$$

cujas derivadas são

$$\frac{dw^e}{dx} = \mathbf{B}^e \mathbf{w}^e. \quad (6.30)$$

O caso particular em que as funções de forma interpolam quer a função candidata $u(x)$ quer a função de peso $w(x)$ é designado por método de Galerkin. Para além deste método existem vários métodos de resíduos pesados que diferem essencialmente na forma como são calculados os resíduos (por exemplo, o método da colocação pontual, o método dos subdomínios, o método dos momentos, *etc.*). No entanto, dada a sua simplicidade e robustez, o método de Galerkin, ou de Bubnov-Galerkin, é o mais frequentemente utilizado no âmbito do método dos elementos finitos. Recorrendo às técnicas agora apresentadas, a determinação da formulação fraca ao nível de cada elemento finito é imediata. As condições de fronteira não necessitam de ser impostas ao nível da relação elementar, devendo estas ser impostas unicamente no momento da assemblagem do sistema global de equações. Reescrevendo a formulação fraca 6.25 no domínio de cada elemento finito, obtém-se

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{dw^e}{dx} \right)^T A^e E^e \frac{du^e}{dx} dx - \int_{\Omega^e} (w^e)^T b dx - \left[(w^e)^T A^e \bar{t} \right] \Big|_{\Gamma_i^e} = 0. \quad (6.31)$$

A transposição dos termos que envolvem a função $w(x)$ tem por único objectivo compatibilizar o cálculo matricial. Substituindo as aproximações 6.28 a 6.30 na expressão 6.31, pode determinar-se que

$$(\mathbf{w}^e)^T \left\{ \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T A^e E^e \mathbf{B}^e dx d^e - \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T b dx - \left[(\mathbf{N}_\Gamma^e)^T A^e \bar{t} \right] \Big|_{\Gamma_t^e} \right\} = 0, \quad (6.32)$$

em que $\mathbf{N}_\Gamma$ é a matriz das funções de forma na fronteira Γ . Na formulação anterior podem identificar-se duas das entidades matemáticas — uma matriz e um vector — mais relevantes no âmbito do método dos elementos finitos. Estas entidades são as seguintes:

Matriz de rigidez elementar

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T A^e E^e \mathbf{B}^e dx. \quad (6.33)$$

Vector de forças externas elementar

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T b dx + \left[(\mathbf{N}_\Gamma^e)^T A^e \bar{t} \right] \Big|_{\Gamma_t^e}. \quad (6.34)$$

Note-se que o vector de forças externas possui contribuições quer do domínio do interior do elemento Ω^e quer da fronteira elementar Γ_t^e . A equação 6.32 pode ser reescrita, de uma forma simplificada, como se segue:

$$(\mathbf{w}^e)^T (\mathbf{k}^e \mathbf{d}^e - \mathbf{f}^e) = 0. \quad (6.35)$$

Na relação anterior percebe-se o carácter sistemático, simples e directo do método dos elementos finitos. Considerando que o domínio contínuo é dividido num número n_e de elementos finitos, a equação 6.35 pode ser aplicada de forma sistemática a cada elemento. No final, as contribuições de cada elemento finito são “adicionadas”, obtendo-se o seguinte sistema de equações discretas final:

$$\mathbf{w}^T (\mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{f}) = 0. \quad (6.36)$$

Devido ao carácter arbitrário do conjunto de valores nodais $\mathbf{w}$, o resíduo $\mathbf{r} = \mathbf{K}\mathbf{d} - \mathbf{f}$ deverá anular-se. Deste modo, a expressão 6.36, que corresponde a

$$\mathbf{w}^T \mathbf{r} = 0, \quad (6.37)$$

leva à seguinte solução do problema:

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}, \quad (6.38)$$

em que $\mathbf{d}$ é o vector global de deslocamentos (graus de liberdade) de todo o modelo numérico. Este vector também é usualmente denominado $\mathbf{u}$ ou $\mathbf{a}$, consoante o problema em causa. A matriz de rigidez global e o vector de forças externas global poderão, à semelhança dos sistemas discretos estudados no Capítulo 5, ser calculados recorrendo à expressão

$$\mathbf{K} = \bigwedge_{e=1}^{n_e} \mathbf{k}^e, \quad (6.39)$$

que define a matriz de rigidez global do sistema, e à expressão

$$\mathbf{f} = \bigwedge_{e=1}^{n_e} \mathbf{f}^e, \quad (6.40)$$

que define o vector de cargas exteriores do sistema. Nas expressões anteriores, o operador

$$\bigwedge_{e=1}^{n_e} \quad (6.41)$$

representa a operação de assemblagem quer das n_e matrizes quer dos n_e vectores elementares.

Exercício 6.1. A seguinte equação diferencial rege o fluxo de calor no domínio unidimensional Ω :

$$\frac{d}{dx} \left(Ak \frac{dT}{dx} \right) + s = 0,$$

em que T é a temperatura, A é a área da secção transversal através da qual se dá o fluxo de calor, k é a condutividade térmica do material e s é a

quantidade de calor gerada por unidade de comprimento. q_n será positivo se houver calor fornecido ao sistema e negativo se for retirado. A formulação forte fica completa prescrevendo quer o fluxo de calor na fronteira Γ_q , isto é, definindo

$$q_n = -kn \frac{dT}{dx} = -\bar{q},$$

o que corresponde à condição de fronteira natural, quer a temperatura na fronteira Γ_T ,

$$T = \bar{T},$$

o que define a condição de fronteira essencial.

Estas condições de fronteira são mutuamente exclusivas e complementares, conforme se estipulou nas relações 6.18. O fluxo de calor prescrito na fronteira $\bar{q}$ pode ser positivo ou negativo (de acordo com o valor do escalar q_n) e é definido pela lei de Fourier, sendo positivo quando a transferência de calor se dá do exterior para a interior de Ω , isto é, quando $(\bar{q} = -q_n > 0)$. Face ao exposto, pretende-se:

- Obter a formulação fraca do problema;
- Determinar as equações de discretização pelo método dos elementos finitos, recorrendo ao método de Galerkin.

Resolução

Neste caso, a condição de fronteira natural contém a derivada da incógnita primária do problema — a temperatura T —, que será naturalmente considerada uma vez obtida a formulação fraca do problema. Por outro lado, a restante condição de fronteira é dita essencial, visto que prescreve directamente a temperatura. Deste modo, a função candidata $T(x)$ deve respeitar a condição $T(x) = \bar{T}$ na fronteira Γ_T . Nesta mesma fronteira, a função de peso deve ser nula, isto é, $w(x) = 0$ em Γ_T . Tomando este facto em consideração, multiplicam-se as equações da formulação forte por $w(x)$ e integram-se nos seus respectivos domínios, obtendo-se

$$\int_{\Omega} w \frac{d}{dx} \left(Ak \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_{\Omega} w s dx = 0$$

e

$$\left[wA \left(qn + kn \frac{dT}{dx} \right) \right] \Big|_{\Gamma_q} = 0.$$

Estas relações são válidas para qualquer função de peso que respeite a condição $w(x) = 0$ em Γ_T . Efectuando a integração por partes da primeira parcela do primeiro membro da equação associada ao domínio Ω , obtém-se

$$\int_{\Omega} w \frac{d}{dx} \left(Ak \frac{dT}{dx} \right) dx = \left(wAk \frac{dT}{dx} \right) \Big|_{\Gamma} - \int_{\Omega} \left(\frac{dw}{dx} Ak \frac{dT}{dx} \right) dx,$$

pelo que aquela equação se pode reescrever na seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{dw}{dx} Ak \frac{dT}{dx} \right) dx = \int_{\Omega} w s dx + \left(wAk \frac{dT}{dx} \right) \Big|_{\Gamma}.$$

Tomando em consideração as condições de fronteira natural e essencial do problema, a formulação fraca pode então ser definida do seguinte modo:

Formulação fraca

Determinar a função T que satisfaz a condição $T = \bar{T}$ em Γ_T e a equação

$$\int_{\Omega} \left(\frac{dw}{dx} Ak \frac{dT}{dx} \right) dx = \int_{\Omega} w s dx + \left(wA\bar{q} \right) \Big|_{\Gamma_q}, \quad \forall w, \text{ com } w=0 \text{ em } \Gamma_T.$$

É notória a semelhança entre a formulação fraca, agora deduzida para o problema térmico, e a equação 6.25, que diz respeito ao problema estrutural. De facto, atendendo à correspondência

$$\begin{cases} u \leftrightarrow T \\ E \leftrightarrow k \\ \bar{t} \leftrightarrow \bar{q} \\ b \leftrightarrow s \end{cases}$$

entre as variáveis intervenientes nas duas formulações, é possível verificar como dois problemas com significados físicos completamente distintos podem ter a mesma abordagem, isto é, formulações idênticas, no âmbito da aplicação do

método dos elementos finitos. Conclusão semelhante foi obtida para os sistemas discretos.

Esta semelhança com o problema estrutural anteriormente estudado é também evidente quando se pretendem determinar as equações de discretização pelo método dos elementos finitos. No contexto do método de Galerkin, as funções candidata e de peso são novamente aproximadas, dentro de cada elemento finito, por meio de funções de forma, ou seja,

$$T^e(x) = \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e$$

e

$$w^e(x) = \mathbf{N}^e \mathbf{w}^e,$$

em que, por conveniência de notação, se manteve a designação $\mathbf{d}$ para o vector de incógnitas nodais, que são, neste caso, os valores da temperatura. Em relação às derivadas das relações anteriores, obtém-se

$$\frac{dT^e(x)}{dx} = \mathbf{B}^e \mathbf{d}^e$$

e

$$\frac{dw^e(x)}{dx} = \mathbf{B}^e \mathbf{w}^e.$$

Assim, a equação da formulação fraca pode ser reescrita para cada elemento finito da seguinte forma:

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{dw^e}{dx} \right)^T A^e k^e \frac{dT^e}{dx} dx - \int_{\Omega^e} (w^e)^T s dx - \left[(w^e)^T A^e \bar{q} \right] \Big|_{\Gamma_q^e} = 0.$$

Após aproximação com funções de forma, a relação anterior fica

$$(\mathbf{w}^e)^T \left\{ \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T A^e k^e \mathbf{B}^e dx \mathbf{d}^e - \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T s dx - \left[(\mathbf{N}_\Gamma^e)^T A^e \bar{q} \right] \Big|_{\Gamma_q^e} \right\} = 0,$$

em que $\mathbf{N}_\Gamma$ é a matriz das funções de forma na superfície Γ .

Para terminar, podem identificar-se as expressões que permitem calcular a matriz de rigidez térmica, isto é,

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T A^e k^e \mathbf{B}^e dx,$$

e o vector de fluxos de calor, ou seja,

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T s dx + \left[(\mathbf{N}_\Gamma^e)^T A^e \bar{q} \right] \Big|_{\Gamma_q^e},$$

para cada elemento finito. Estas grandezas matriciais são em tudo semelhantes às que se determinaram para o problema estrutural estudado nas secções anteriores. Consequentemente, o sistema de equações elementar resulta em

$$(\mathbf{w}^e)^T (\mathbf{k}^e \mathbf{d}^e - \mathbf{f}^e) = 0.$$

Efectuando-se a assemblagem de todas as contribuições dos elementos finitos obtém-se a matriz de rigidez térmica global do problema

$$\mathbf{K} = \bigwedge_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{k}^e$$

e o vector de fluxos exteriores do sistema

$$\mathbf{f} = \bigwedge_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{f}^e.$$

Finalmente, o campo de temperaturas — o vector $\mathbf{d}$ — pode calcular-se resolvendo o sistema de equações.

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f}.$$

6.3 Problemas bidimensionais

O tratamento de problemas bidimensionais ou tridimensionais baseia-se nos mesmos princípios definidos anteriormente para o caso unidimensional, isto é, a partir da formulação forte de um problema deriva-se a sua formulação fraca e, por fim, determinam-se as equações discretizadas por elementos finitos.

Nos pontos que se seguem vão analisar-se alguns problemas bidimensionais. No âmbito dos problemas físicos em duas dimensões, considere-se, por exemplo, o fluxo térmico bidimensional (2D), apesar do aspecto final das expressões de

elementos finitos ser muito semelhante ao de problemas de mecânica estrutural ou de problemas de escoamento de fluidos ideais.

A formulação forte que rege a transmissão de calor em duas dimensões pode obter-se realizando o balanço energético num elemento de área representativo. A equação de Fourier para o fluxo de calor pode ser reescrita de forma completa num contexto bidimensional, conjuntamente com as respectivas condições de fronteira. Obtém-se assim a formulação forte do problema, ou seja,

Formulação forte

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{q} - s = 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{q} = -\mathbf{C} \cdot \nabla T & \text{em } \Omega \\ q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -\bar{q} & \text{em } \Gamma_q \\ T = \bar{T} & \text{em } \Gamma_T \end{cases} \quad (6.42)$$

Na formulação anterior, $\mathbf{C}$ é o tensor de condutividade térmica e o vector $\mathbf{n}$ corresponde à normal exterior em cada ponto da fronteira Γ . A fronteira do domínio do problema encontra-se dividida nas fronteiras Γ_q e Γ_T , conforme se mostra na Figura 6.4.

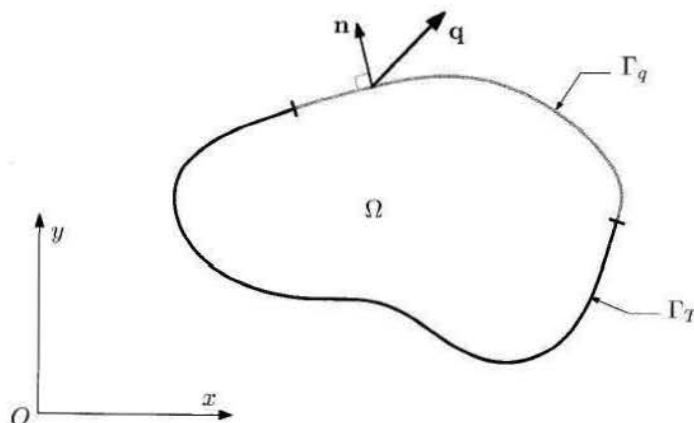


Figura 6.4 Representação esquemática do domínio e dos respectivos tipos de fronteira, para um problema de condução de calor em duas dimensões.

Comparando com os problemas unidimensionais, a derivação da formulação fraca para problemas multidimensionais encontra complexidade acrescida apenas no que diz respeito às noções de cálculo diferencial e de cálculo integral que lhe estão subjacentes. Assim, antes de se prosseguir, recordam-se algumas noções relativas aos operadores gradiente e divergência, bem como o teorema de Green.

Considere-se, por exemplo, o vector fluxo de calor em duas dimensões e as suas componentes num sistema de eixos ortonormado Oxy , isto é,

$$\mathbf{q} = q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j}, \quad (6.43)$$

em que $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ são os versores das direcções Ox e Oy , respectivamente. Em notação matricial pode escrever-se o seguinte:

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix}. \quad (6.44)$$

O operador gradiente ∇ é o equivalente bidimensional ao operador de diferenciação, isto é,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \quad (6.45)$$

ou, ainda,

$$\nabla = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (6.46)$$

O operador gradiente é também usualmente designado por $\text{grad}(\cdot)$ e pode ser aplicado quer a vectores quer a funções matemáticas. No primeiro caso, utilizando como exemplo o vector de fluxo de calor $\mathbf{q}$, efectua-se o produto interno entre o operador gradiente e o referido vector, obtendo-se o escalar

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (q_x, q_y) = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}, \quad (6.47)$$

que frequentemente se designa por divergência, ou seja, $\text{div}(\mathbf{q})$. No caso das funções, utilizando, a título de exemplo, a função de peso $w(x, y)$, da aplicação do operador gradiente, resulta o vector

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y} \mathbf{j}. \quad (6.48)$$

A noção de divergência permite introduzir o teorema da divergência, que, na prática, é uma generalização para várias dimensões do teorema fundamental do cálculo (equação 6.13). Em problemas bidimensionais, o teorema da divergência relaciona o integral de área da divergência de um vector com o integral de linha do mesmo. De forma análoga, em casos tridimensionais obter-se-ia a relação do integral de volume da divergência de um vector com o respectivo integral de superfície, isto é,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{q} d\Omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (6.49)$$

ou, após o desenvolvimento dos produtos internos nos integrais da equação anterior,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) d\Omega = \oint_{\Gamma} (q_x n_x + q_y n_y) d\Gamma. \quad (6.50)$$

A fórmula de Green é crucial para se obter a formulação fraca de problemas multidimensionais. Propositadamente, deduz-se esta fórmula recorrendo à variável $\mathbf{q}$ e à função de peso w , uma vez que serão intervenientes na dedução da formulação fraca para o problema de condução térmica em duas dimensões. Derivando a fórmula de Green, que consiste na regra de integração por partes (equação 6.8) generalizada a duas ou mais dimensões, e calculando o gradiente do produto $w\mathbf{q}$, obtém-se

$$\nabla \cdot (w\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial x}(wq_x) + \frac{\partial}{\partial y}(wq_y). \quad (6.51)$$

Aplicando a regra da derivada do produto e colocando a função de peso em evidência, chega-se a

$$\nabla \cdot (w\mathbf{q}) = w \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} q_x + \frac{\partial w}{\partial y} q_y \right) \quad (6.52)$$

ou, ainda,

$$\nabla \cdot (w\mathbf{q}) = w \nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla w \cdot \mathbf{q}. \quad (6.53)$$

Tornam-se assim evidentes as semelhanças entre a equação anterior e a regra da derivada do produto. Ambos os membros da equação 6.53 deverão ser integrados em todo o seu domínio, resultando

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (w\mathbf{q}) d\Omega = \int_{\Omega} w \nabla \cdot \mathbf{q} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{q} d\Omega. \quad (6.54)$$

Finalmente, aplicando o teorema da divergência, dado pela relação 6.49, ao primeiro termo da equação anterior, obtém-se a fórmula de Green, ou seja,

$$\oint_{\Gamma} w \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} w \nabla \cdot \mathbf{q} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{q} d\Omega, \quad (6.55)$$

que pode ser reorganizada da seguinte forma:

Fórmula de Green

$$\int_{\Omega} w \nabla \cdot \mathbf{q} d\Omega = \oint_{\Gamma} w \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{q} d\Omega. \quad (6.56)$$

Recordadas que estão as noções de cálculo necessárias, retoma-se a formulação forte para o problema de escoamento de calor bidimensional, dada pelas equações 6.42. De modo similar ao procedimento utilizado nos problemas unidimensionais explicados nas secções anteriores, multiplicar-se-á a função de peso w pelas equações que definem a formulação forte, integrando-as nos respectivos domínios de definição. Assim, para a primeira e terceira equações da formulação forte do problema, definidas nas relações 6.42, obtém-se

$$\int_{\Omega} w (\nabla \cdot \mathbf{q} - s) d\Omega = 0, \quad \forall w, \quad (6.57)$$

e

$$\int_{\Gamma_q} w (\bar{q} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = 0, \quad \forall w, \quad (6.58)$$

respectivamente.

Combinando a equação 6.56 com a equação 6.57 e reorganizando os seus termos, chega-se à seguinte relação:

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{q} d\Omega = \oint_{\Gamma} w \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} w s d\Omega. \quad (6.59)$$

O primeiro termo do segundo membro da equação anterior pode ser desdobrado nas fronteiras Γ_q e Γ_T , obtendo-se

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{q} d\Omega = \int_{\Gamma_q} w \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_T} w \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} w s d\Omega, \quad (6.60)$$

sendo assim possível tomar em consideração a equação 6.58. Simultaneamente, seguindo o raciocínio adoptado anteriormente, considera-se que $w(x) = 0$ em toda a parte da fronteira a que corresponde a condição de fronteira essencial do problema. Na prática, tal significa anular a segunda parcela do segundo membro da equação 6.60. Deste modo, obtém-se

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{q} d\Omega = \int_{\Gamma_a} \underbrace{w \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}_{=-w\bar{q}} d\Gamma + \underbrace{\int_{\Gamma_T} w \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma}_{=0} - \int_{\Omega} w s d\Omega \quad (6.61)$$

ou, ainda,

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{q} d\Omega = - \int_{\Gamma_a} w \bar{q} d\Gamma - \int_{\Omega} w s d\Omega. \quad (6.62)$$

Consequentemente, a formulação fraca para este problema obtém-se após substituição da lei de Fourier ($\mathbf{q} = -\mathbf{C} \cdot \nabla T$) na equação 6.62, ou seja,

Formulação fraca

Determinar a função T que satisfaz a condição $T = \bar{T}$ em Γ_T e a equação

$$\int_{\Omega} (\nabla w) \cdot \mathbf{C} \cdot (\nabla T) d\Omega = \int_{\Omega} w s d\Omega + \int_{\Gamma_a} w \bar{q} d\Gamma, \quad \forall w, \text{ com } w=0 \text{ em } \Gamma_T. \quad (6.63)$$

6.3.1 Discretização em elementos finitos

Nesta secção, em que se procede à discretização em elementos finitos, utiliza-se, por uma questão de conveniência, notação matricial para descrever a formulação fraca expressa na equação 6.63. Consequentemente, esta formulação pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} (\nabla w)^T \mathbf{C} (\nabla T) d\Omega = \int_{\Omega} w s d\Omega + \int_{\Gamma_a} w \bar{q} d\Gamma, \quad \forall w, \text{ com } w=0 \text{ em } \Gamma_T, \quad (6.64)$$

em que

$$\nabla w = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla T = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (6.65)$$

Adicionalmente,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

é a matriz de condutividade térmica. Mais uma vez, recorrendo ao método de Galerkin, utilizam-se as funções de forma para aproximar quer a função candida quer a função de peso. Note-se que estas funções são agora bidimensionais, ou seja, funções de x e de y , pelo que

$$\begin{cases} T(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{d} \\ w(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{w} \end{cases} \quad (6.67)$$

ou, relativamente a cada elemento finito bidimensional,

$$\begin{cases} T^e(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{d}^e \\ w^e(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{w}^e \end{cases} \quad (6.68)$$

Conforme se referiu anteriormente, o operador gradiente é equivalente ao operador de derivação em várias dimensões. Assim,

$$\nabla T^e(x, y) = \nabla \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{d}^e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^e(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^e(x, y)}{\partial y} \end{Bmatrix} \mathbf{d}^e. \quad (6.69)$$

Deste modo, é possível estabelecer que

$$\nabla \mathbf{N}^e(x, y) = \mathbf{B}^e(x, y). \quad (6.70)$$

Reescrevendo a formulação fraca definida pela equação 6.64 e contemplando a discretização por elementos finitos, obtém-se

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N} \mathbf{w})^T \mathbf{C} (\nabla \mathbf{N} \mathbf{d}) d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{N} \mathbf{w})^T s d\Omega + \int_{\Gamma_q} (\mathbf{N}_{\Gamma} \mathbf{w})^T \bar{q} d\Gamma, \quad (6.71)$$

em que $\mathbf{N}_{\Gamma}$ é a matriz das funções de forma na superfície Γ .

Finalmente, no contexto de cada elemento finito e atendendo à relação 6.70, chega-se a

$$(\mathbf{w}^e)^T \left[\int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{C} \mathbf{B}^e d\Omega d^e - \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T s d\Omega - \int_{\Gamma_q^e} (\mathbf{N}_\Gamma^e)^T \bar{q} d\Gamma \right] = 0, \quad (6.72)$$

em que, uma vez mais, podem ser facilmente identificadas quer a seguinte matriz de rigidez térmica elementar

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{C} \mathbf{B}^e d\Omega \quad (6.73)$$

quer o vector de fluxos de calor $\mathbf{f}$ elementar

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T s d\Omega + \int_{\Gamma_q^e} (\mathbf{N}_\Gamma^e)^T \bar{q} d\Gamma. \quad (6.74)$$

A partir destas entidades torna-se possível obter o sistema global de equações algébricas $\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f}$, após assemblagem da contribuição de cada elemento finito para o modelo global. Assim, a matriz de rigidez térmica global é

$$\mathbf{K} = \bigwedge_{e=1}^{n_e} \mathbf{k}^e \quad (6.75)$$

e o vector de fluxos exteriores do sistema é

$$\mathbf{f} = \bigwedge_{e=1}^{n_e} \mathbf{f}^e. \quad (6.76)$$

6.3.2 Extensão ao caso tridimensional

O tratamento de problemas tridimensionais (3D) é uma extensão trivial das equações deduzidas para o caso bidimensional (2D) na secção anterior. A título de exemplo, considere-se novamente o problema de condução de calor. Naturalmente, o domínio (uma linha no caso unidimensional ou uma superfície no caso bidimensional) é, neste caso, um volume. As fronteiras (pontos no caso unidimensional ou linhas no caso bidimensional) são, no caso tridimensional, superfícies. O vector fluxo de calor conta agora com uma componente adicional,

bem como o operador gradiente, isto é,

$$\mathbf{q} = q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k} \quad (6.77)$$

e

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (6.78)$$

ou, em notação matricial,

$$\mathbf{q} = \{ q_x \ q_y \ q_z \}^T \quad (6.79)$$

e

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial y} \ \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T. \quad (6.80)$$

Recuperando a formulação fraca definida na equação 6.64, é possível verificar que esta é igualmente válida também para o caso tridimensional, desde que as variáveis presentes considerem a terceira dimensão. Assim, a função incógnita para o campo de temperaturas T e a função de peso w serão discretizadas recorrendo a funções de forma em três dimensões, isto é,

$$\begin{cases} T(x, y, z) = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{d} \\ w(x, y, z) = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{w} \end{cases} \quad (6.81)$$

obtendo-se, relativamente a cada elemento finito e para o caso do campo de temperaturas, a seguinte relação:

$$\nabla T^e(x, y, z) = \nabla \mathbf{N}^e(x, y, z) \mathbf{d}^e = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{N}^e(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^e(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^e(x, y, z)}{\partial z} \end{array} \right\} \mathbf{d}^e, \quad (6.82)$$

em que

$$\nabla \mathbf{N}^e(x, y, z) = \mathbf{B}^e(x, y, z). \quad (6.83)$$

Por fim, a matriz de condutividade térmica $\mathbf{C}$ encontra-se agora associada a uma dimensão adicional, isto é,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}, \quad (6.84)$$

permitindo a aplicação da formulação forte, tal como deduzida na secção anterior.

6.4 Elasticidade linear

Como se referiu no Capítulo 1, o desenvolvimento de toda a metodologia de cálculo do método dos elementos finitos foi impulsionado, inicialmente, por cientistas e investigadores de áreas da Engenharia Civil e da Engenharia Mecânica. De facto, o cálculo estrutural, primeiramente em regime linear elástico e só mais tarde com inclusão de efeitos não-lineares, é a aplicação, por excelência, do método dos elementos finitos. Porém, presentemente as áreas de aplicação do MEF são significativamente mais abrangentes.

Nesta secção, abordam-se problemas clássicos multidimensionais de mecânica estrutural e mostra-se como se podem obter as equações discretizadas por elementos finitos a partir de uma abordagem directa à aproximação do campo de deslocamentos recorrendo ao princípio dos trabalhos virtuais. Alternativamente, seguindo uma metodologia em tudo idêntica à utilizada nas secções anteriores deste capítulo, pode chegar-se à formulação fraca do problema partindo da sua formulação forte.

Em qualquer uma das abordagens será necessário recorrer a noções básicas de mecânica de meios contínuos. Assim, considera-se o caso geral tridimensional e recorda-se a determinação do estado linear de tensão num corpo material a partir da aplicação da lei de Hooke, que, em notação tensorial, corresponde a

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6.85)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ são os tensores das tensões de Cauchy e das deformações, respectivamente, e $\mathbf{D}$ é o tensor de elasticidade.

No entanto, de acordo com a notação de Voigt, esta relação tensorial pode ser escrita na forma matricial, considerando as componentes cartesianas dos estados de tensão e de deformação, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (6.86)$$

em que $\mathbf{D}$ é a matriz constitutiva isotrópica em três dimensões que representa o tensor de elasticidade, também designada por matriz de elasticidade. Esta matriz depende das constantes elásticas do material, isto é, do módulo de Young E e do coeficiente de Poisson ν , ou seja,

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}. \quad (6.87)$$

Por outro lado, o campo de deformações lineares é definido a partir das derivadas de primeira ordem do campo de deslocamentos global $\mathbf{u} = (u, v, w)$, isto é,

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (6.88)$$

e

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}. \quad (6.89)$$

Consequentemente, os deslocamentos são considerados como incógnitas primárias do problema. A partir do conjunto anterior de equações é possível definir um operador diferencial matricial ∇_s , que relaciona o campo de deformações com o campo de deslocamentos na forma

$$\epsilon = \nabla_s \mathbf{u},$$

ou, de forma estendida,

$$\nabla_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (6.90)$$

Ao nível do elemento finito, o campo de deslocamentos real é aproximado recorrendo a um conjunto de funções de forma e aos valores dos deslocamentos nodais,

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e, \quad (6.91)$$

em que $\mathbf{d}^e = \{u_i \ v_i \ w_i \ \dots\}^T$, com $i = 1, \dots, n_{\text{nos}}$, sendo n_{nos} o número de nós do elemento finito em causa. $\mathbf{N}$ é a matriz das funções de forma do elemento finito em questão, vindo na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_i(x, y, z) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(x, y, z) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_i(x, y, z) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n_{\text{nos}}. \quad (6.92)$$

No que toca ao campo de deformações, recorre-se ao operador ∇_s , definido na equação 6.90, tornando-se possível estabelecer que

$$\epsilon = \nabla_s \mathbf{u} = \nabla_s (\mathbf{N}^e \mathbf{d}^e) = \mathbf{B}^e \mathbf{d}^e. \quad (6.93)$$

No seguimento da expressão anterior, a matriz $\mathbf{B}_i^e$ das derivadas das funções de forma de cada nó i do elemento finito é dada por

$$\mathbf{B}_i^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n_{\text{nos}}. \quad (6.94)$$

A formulação da matriz $\mathbf{B}_i^e$ será alvo de um estudo mais aprofundado noutros pontos desta obra, nomeadamente nos Capítulos 7 a 10, em que se trata detalhadamente a arquitectura dos elementos finitos em uma ou mais dimensões.

O princípio dos trabalhos virtuais estabelece que num sistema em equilíbrio estático o trabalho realizado pelas forças internas deve ser igual ao trabalho realizado pelas forças externas. No caso presente, os campos de deslocamentos e de deformações podem ser calculados recorrendo a um campo de deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{d}$, do seguinte modo:

$$\begin{cases} \delta \mathbf{u}^e = \mathbf{N}^e \delta \mathbf{d}^e \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}^e \delta \mathbf{d}^e \end{cases} \quad (6.95)$$

Deste modo, o trabalho realizado pelas forças internas, por unidade de volume, é dado por

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} = (\delta \mathbf{d}^e)^T (\mathbf{B}^e)^T \boldsymbol{\sigma}, \quad (6.96)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ representa o estado de tensão no corpo.

O trabalho das forças externas será função das forças distribuídas no domínio Ω e na fronteira Γ , que resultam nos trabalhos volúmico e superficial das forças externas, definidos por

$$\delta W_{\text{ext}\Omega} = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{b} = (\delta \mathbf{d}^e)^T (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{b} \quad (6.97)$$

e

$$\delta W_{\text{ext}\Gamma} = (\delta \mathbf{u}^e)^T \bar{\mathbf{t}} = (\delta \mathbf{d}^e)^T (\mathbf{N}_\Gamma^e)^T \bar{\mathbf{t}}, \quad (6.98)$$

respectivamente.

De forma a obter os valores totais de trabalho, há que integrar as equações 6.96 e 6.97 no volume do elemento, e 6.98 na superfície do elemento sujeita a

cargas superficiais prescritas. Assim, obtém-se

$$W_{\text{int}} = (\delta \mathbf{d}^e)^T \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega, \quad (6.99)$$

$$W_{\text{ext}\Omega} = (\delta \mathbf{d}^e)^T \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{b} d\Omega \quad (6.100)$$

e

$$W_{\text{ext}\Gamma} = (\delta \mathbf{d}^e)^T \int_{\Gamma_t^e} (\mathbf{N}_\Gamma^e)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma. \quad (6.101)$$

Deste modo, igualando o trabalho das forças internas ao trabalho das forças externas, obtém-se

$$(\delta \mathbf{d}^e)^T \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = (\delta \mathbf{d}^e)^T \left[\int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t^e} (\mathbf{N}_\Gamma^e)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right]. \quad (6.102)$$

Uma vez que o campo de deslocamentos virtuais é uma quantidade arbitrária não-nula (com $\delta \mathbf{d}^e = \mathbf{0}$ em Γ_u^e), torna-se possível eliminá-lo de ambos os membros da equação anterior. Assim, estabelece-se que a equação de equilíbrio para o elemento finito e é a seguinte:

$$\mathbf{k}^e \mathbf{d}^e = \mathbf{f}^e, \quad (6.103)$$

em que a matriz de rigidez elementar é definida, atendendo às relações 6.86 e 6.93, por

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e d\Omega \quad (6.104)$$

e o vector de forças nodais corresponde a

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t^e} (\mathbf{N}_\Gamma^e)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma. \quad (6.105)$$

O leitor poderá agora comparar as equações agora deduzidas com as equações 6.33 e 6.34. De seguida as matrizes de rigidez e os vectores de forças elementares deverão ser assemblados no sistema global de equações de equilíbrio.

De modo a ilustrar a utilização e a manipulação algébrica de quantidades tensoriais no âmbito da elasticidade linear, procede-se, em seguida, à apresentação da formulação forte e à posterior obtenção detalhada da formulação fraca com

base no princípio dos trabalhos virtuais, também designado por Princípio dos Deslocamentos Virtuais (PDV). Os procedimentos aqui utilizados serão também posteriormente utilizados na obtenção das equações numéricas discretizadas associadas ao problema de elastoplasticidade, que, como se verá no Capítulo 12, é de natureza não-linear, pelo que a sua resolução requer a utilização de um processo de resolução de natureza incremental. Por fim, são obtidas as equações de equilíbrio discretizadas ao nível elementar. Neste contexto, o problema de elasticidade linear tridimensional consiste, em termos de notação tensorial, na seguinte formulação:

Formulação forte

Elasticidade linear multidimensional

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{em } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} & \text{em } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\operatorname{grad}(\mathbf{u}) + [\operatorname{grad}(\mathbf{u})]^T] & \text{em } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} & \text{em } \Gamma_t \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{em } \Gamma_u \end{cases} \quad (6.106)$$

As equações 6.106 definem a equação de equilíbrio, a relação constitutiva, a relação deformações-deslocamentos — linearizada com base na hipótese das pequenas transformações —, a condição de fronteira natural e as condição de fronteira essencial, respectivamente. $\operatorname{div}(\cdot)$ denota o operador divergência.

Com base na formulação forte é possível obter a formulação fraca do problema de elasticidade tridimensional. Em seguida ilustra-se este procedimento baseado na utilização do princípio dos deslocamentos virtuais. Assim, considerando um campo $\delta \mathbf{u}$ arbitrário de deslocamentos virtuais, com $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ em Γ_u , efectua-se o seu produto (tensorial) escalar pela equação de equilíbrio e integra-se no domínio Ω . Deste modo, obtém-se

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot [\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b}] \, d\Omega = 0. \quad (6.107)$$

Substituindo nesta equação a identidade

$$\delta \mathbf{u} \cdot \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \operatorname{div}(\delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \operatorname{grad}(\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma} \quad (6.108)$$

e procedendo à reorganização dos seus termos, resulta

$$\int_{\Omega} \text{grad}(\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(\delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega. \quad (6.109)$$

A aplicação do teorema da divergência ao último termo do segundo membro desta equação resulta em

$$\int_{\Omega} \text{div}(\delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma. \quad (6.110)$$

No entanto, sendo $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ e $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ em Γ_u , vem que

$$\int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma. \quad (6.111)$$

A substituição das equações, 6.110 e 6.111 na equação 6.109, considerando a equação constitutiva e a condição de fronteira natural, resulta em

$$\int_{\Omega} \text{grad}(\delta \mathbf{u}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma. \quad (6.112)$$

Por outro lado, atendendo à simetria de $\mathbf{D}$ e à relação deformações-deslocamentos, tem-se que

$$\mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} : \text{grad}(\mathbf{u}), \quad (6.113)$$

pelo que a equação 6.112 resulta em

$$\int_{\Omega} \text{grad}(\delta \mathbf{u}) : \mathbf{D} : \text{grad}(\mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma. \quad (6.114)$$

Esta equação integral corresponde ao princípio dos deslocamentos virtuais para o problema de elasticidade linear associado à formulação forte definidas pelas equações 6.106, e permite definir a formulação fraca do seguinte modo:

Formulação fraca

Determinar a função $\mathbf{u}$ que satisfaz a condição $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ em Γ_u e a equação

$$\int_{\Omega} \text{grad}(\delta \mathbf{u}) : \mathbf{D} : \text{grad}(\mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma, \quad \forall \delta \mathbf{u}, \text{ com } \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_u. \quad (6.115)$$

Após a obtenção da formulação fraca do problema de elasticidade linear, procede-se à sua discretização espacial por elementos finitos. Restringindo a equação anterior ao domínio de um elemento finito, esta pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega^e} \text{grad}(\delta \mathbf{u}) : \mathbf{D} : \text{grad}(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega^e} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t^e} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma. \quad (6.116)$$

Aproximando, ao nível do elemento finito, os campos de deslocamentos reais e virtuais recorrendo a um conjunto de funções de forma e aos valores dos deslocamentos nodais, tem-se

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e \quad (6.117)$$

e

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N}^e \delta \mathbf{d}^e, \quad (6.118)$$

respectivamente. Por outro lado, os gradientes dos campos de deslocamentos reais e virtuais podem ser, de modo análogo, aproximados por

$$\nabla_s \mathbf{u} = \nabla_s (\mathbf{N}^e \mathbf{d}^e) = \mathbf{B}^e \mathbf{d}^e \quad (6.119)$$

e

$$\nabla_s \delta \mathbf{u} = \nabla_s (\mathbf{N}^e \delta \mathbf{d}^e) = \mathbf{B}^e \delta \mathbf{d}^e, \quad (6.120)$$

respectivamente.

Com base nestas aproximações, a discretização da formulação fraca resulta, ao nível de um elemento finito, em

$$\int_{\Omega^e} (\nabla_s \delta \mathbf{u})^T \mathbf{D} (\nabla_s \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega^e} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t^e} (\delta \mathbf{u})^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma, \quad (6.121)$$

ou, ainda,

$$(\delta \mathbf{d}^e)^T \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} (\mathbf{B}^e) d\Omega \mathbf{d}^e = (\delta \mathbf{d}^e)^T \left[\int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t^e} (\mathbf{N}_\Gamma^e)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right], \quad (6.122)$$

em que $\mathbf{N}_\Gamma$ é a matriz das funções de forma na superfície Γ .

Uma vez que o campo de deslocamentos virtuais é uma quantidade arbitrária não-nula (com $\delta \mathbf{d}^e = \mathbf{0}$ em Γ_u^e), torna-se possível eliminá-lo de ambos os membros da equação anterior, obtendo-se, então, a equação de equilíbrio elementar

6.103, constituída pela matriz de rigidez elementar 6.104 e o vector de forças nodais 6.105.

Nos capítulos que se seguem serão apresentadas vários tipos de elementos finitos adequados a domínios unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. Cada formulação permite calcular de modo distinto a aproximação ao campo de deslocamentos e, por conseguinte, aos campos de deformações e de tensões no meio contínuo a estudar.

Problemas Propostos

Nos problemas que aqui se propõem, o leitor é encorajado a derivar as formulações fracas a partir das formulações fortes fornecidas, quer em domínios unidimensionais quer bidimensionais, bem como a obter as equações discretizadas por elementos finitos através do método de Galerkin. Alguns dos problemas propostos têm carácter abstracto, outros têm significado físico mais concreto. Mais do que obter resultados concretos através da determinação de incógnitas com significado físico, pretende-se que o leitor possa dominar as técnicas básicas de derivação das equações básicas do método dos elementos finitos aplicado a problemas de comportamento linear. Deste modo ficará facilitada a compreensão dos capítulos que se seguem, relativos à tecnologia de elementos finitos.

Problema 6.1. Considere o veio de secção transversal circular com momento polar de inércia variável $J(x)$ construído num material homogéneo com módulo de corte G e que se encontra representado na Figura 6.5. A resposta mecânica do veio quando sujeito a um momento torsor distribuído por unidade de comprimento $m_t(x)$ é dada pela relação

$$m_t(x) + \frac{d}{dx} \left(JG \frac{d\varphi}{dx} \right) = 0,$$

em que $\varphi(x)$ é o ângulo de torção de cada secção transversal do veio.

Supondo que o comprimento do veio é $L = 100$, a rotação num seu extremo ($x = 100$) é nula (condição de fronteira essencial) e o momento torsor aplicado no outro extremo $M_t = \left(JG \frac{d\varphi}{dx} \right) \Big|_{x=0} = 7$ (condição de fronteira natural), determine a formulação fraca do problema e obtenha as equações de discretização por elementos finitos recorrendo ao método de Galerkin.

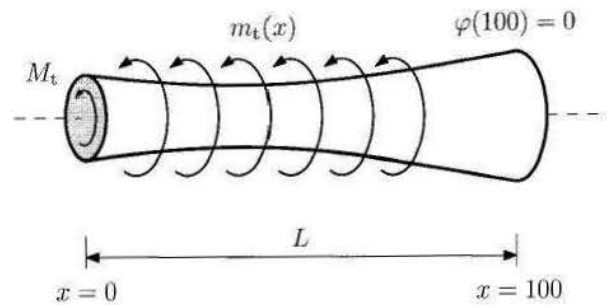


Figura 6.5 Veio de secção transversal circular variável sujeito um momento torsor distribuído por unidade de comprimento $m_t(x)$ (Problema 6.1).

Problema 6.2. Considere uma viga de comprimento $L = 20$ simplesmente apoiada nos seus extremos, conforme se mostra na Figura 6.6, e sujeita a uma solicitação ao longo do seu comprimento. Esta solicitação pode ser definida pela equação de momentos flectores $M(x)$. A equação da linha elástica, ou seja, a equação diferencial com a qual se pode determinar o deslocamento vertical — a flecha $y(x)$ —, é, em cada ponto de viga, a seguinte:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI},$$

em que E é o módulo de Young (módulo de elasticidade) do material da viga e I é o momento de inércia da secção transversal da viga. Atenda-se ao facto de a formulação forte do problema ficar completa, para a viga simplesmente apoiada, com as condições de fronteira do tipo essencial

$$y(0) = y(20) = 0.$$

Derive a formulação fraca do problema tendo em atenção as condições de fronteira essenciais impostas nas zonas apoiadas da viga e obtenha as equações discretizadas por elementos finitos recorrendo ao método de Galerkin.

Problema 6.3. Considere a formulação forte de uma barra submetida a um carregamento de compressão, dada pelas equações 6.3 e 6.4.

Obtenha a formulação fraca do problema para um carregamento distribuído por unidade de comprimento dado pela função $b = -5x$. Considere que o com-

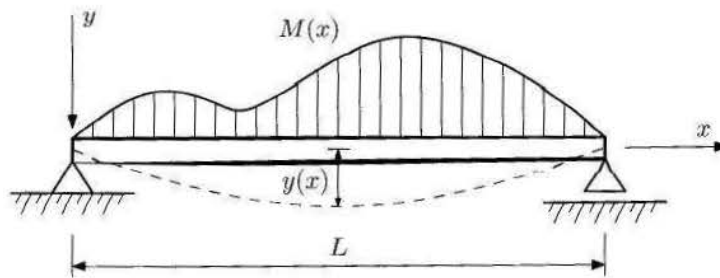


Figura 6.6 Viga de comprimento L simplesmente apoiada nos extremos e sujeita a um carregamento definido pela equação de momentos flectores $M(x)$ (Problema 6.2).

primento da viga é $L = 10$ e que as condições de fronteira são $u(0) = 0,2$ e $\sigma(10) = -15$.

Problema 6.4. Em mecânica de fluidos, a viscosidade μ é uma medida da resistência de um fluido à deformação causada por uma solicitação exterior de corte τ . Quanto maior a viscosidade μ do fluido, menor será a velocidade v com que o fluido se movimenta. A lei de Newton permite relacionar todas estas grandezas do seguinte modo:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y}.$$

A maioria dos fluidos (incluindo a generalidade dos gases) satisfaz a lei de Newton e, por esse motivo, esses fluidos são frequentemente designados por fluidos newtonianos.

Determine a formulação fraca do problema em causa, bem como as equações discretizadas por elementos finitos, sabendo que para $y = 0$ a velocidade é $v = 0$.

Problema 6.5. A formulação forte de um dado problema físico rege-se pelo seguinte conjunto de equação diferencial e condições de fronteira:

$$5x \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 5 = 0 \quad \text{para } x \in]0, 2[$$

e

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=2} = 1.$$

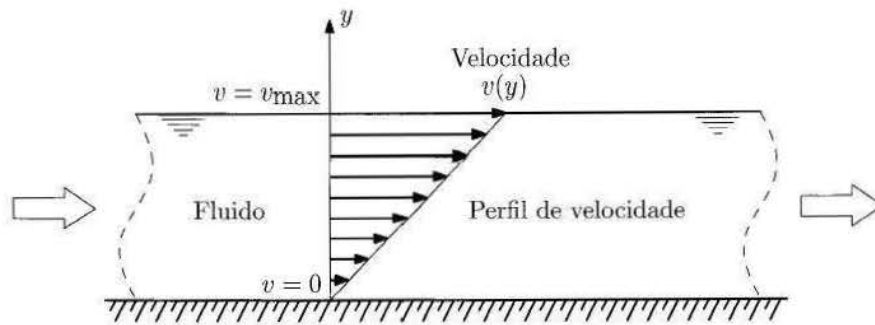


Figura 6.7 Representação esquemática do escoamento de um fluido newtoniano e do respectivo perfil de velocidade (Problema 6.4).

Determine a formulação fraca do problema considerando as condições de fronteira impostas e obtenha as equações de discretização em elementos finitos recorrendo ao método de Galerkin.

Problema 6.6. A torção de barras prismáticas com secção transversal constante e paralela ao plano Oxy , como a que se representa esquematicamente na Figura 6.8, obedece à seguinte equação diferencial no domínio Ω :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta,$$

em que ϕ é a função de tensão instalada no corpo, G é o módulo de corte do material e θ é o ângulo de torção por unidade de comprimento da barra. Na fronteira de cada secção transversal da barra prismática dever-se-á verificar a condição

$$\phi = 0.$$

Obtenha a formulação fraca do problema para uma secção transversal da barra a partir da aplicação do teorema de Green e respeitando a condição de fronteira imposta.

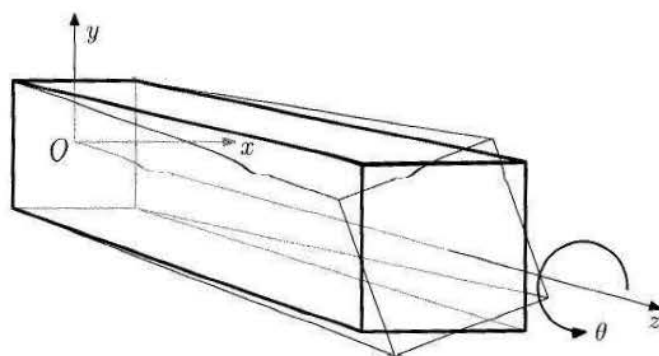


Figura 6.8 Representação esquemática de uma barra prismática com secção transversal constante paralela ao plano Oxy , sob o efeito de um esforço de torção (Problema 6.6).

Referências Bibliográficas

1. Apostol, T.M. *Cálculo — Cálculo com Funções de uma Variável, com uma Introdução à Álgebra Linear*, Vol. 1, Editorial Reverté, Barcelona, Espanha, 1994.
2. Apostol, T.M. *Cálculo — Cálculo com Funções de várias Variáveis e Álgebra Linear, com Aplicações às Equações Diferenciais e às Probabilidades*, Vol. 2, Editorial Reverté, Barcelona, Espanha, 1994.
3. Fish, J., Belytschko T. *A First Course in Finite Elements*, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido, 2007.
4. Hosford, W.F. *Mechanical Behavior of Materials*, Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2005.
5. Hughes, T.J.R. *The Finite Element Method — Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2000.
6. Lewis, R.W., Morgan, K., Thomas, H.R., Seetharamu, K.N. *The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis*, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido, 1996.
7. Timoshenko, S.P. *Strength of Materials — Part 1: Elementary Theory and Problems, and Part 2: Advanced Theory and Problems*, R.E. Krieger Publishing Co., Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1983.
8. Timoshenko, S.P., Goodier, J.N. *Theory of Elasticity*, 3.^a edição, McGraw-Hill, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1970.
9. Zienkiewicz, O.C., Morgan, K. *Finite Elements and Approximation*, John Wiley & Sons, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1983.

Resumo Este capítulo inicia-se com uma breve descrição dos princípios dos trabalhos virtuais e da energia potencial mínima. Com base nestes princípios energéticos determinam-se as relações de equilíbrio estático em problemas unidimensionais, tal como, por exemplo, o estudo do comportamento de uma barra sujeita a carregamentos axiais. Apresentam-se as equações gerais deste problema e determinam-se as variáveis de interesse, recorrendo a discretizações em um ou em múltiplos elementos finitos lineares. Determinam-se ainda os sistemas de equações elementares a partir dos princípios energéticos enunciados. Abordam-se as formulações de elementos finitos unidimensionais de ordem superior e descrevem-se, brevemente, os princípios de integração numérica para o caso unidimensional.

7.1 Introdução

No Capítulo 5 apresentou-se um conjunto de abordagens matriciais com as quais se torna possível analisar sistemas discretos de engenharia, tais como, por exemplo, estruturas articuladas, estruturas reticuladas, circuitos eléctricos e redes hidráulicas. No entanto, em rigor, todos os sistemas deveriam ser considerados como contínuos, isto é, ter não um número limitado, mas sim um número infinito, de graus de liberdade. Ora, para determinar o comportamento de tais sistemas seria necessário integrar as respectivas equações diferenciais de equilíbrio. Como facilmente se entenderá, esta tarefa é, na maioria das situações, impraticável, senão mesmo impossível.

No Capítulo 6 foi apresentada a generalização do método dos elementos finitos para sistemas contínuos. O MEF é um dos métodos numéricos mais robustos que permitem, precisamente, determinar de forma aproximada o comportamento de sistemas com um número infinito de graus de liberdade. Neste capítulo, a partir dos formalismos matemáticos desenvolvidos no Capítulo 6, apresentam-se os procedimentos inerentes à formulação de elementos finitos unidimensionais.

Para ilustrar como se pode aplicar o método dos elementos finitos para obter o comportamento de um sistema contínuo, será utilizado um exemplo simples e clássico de uma barra submetida a um conjunto de esforços na direcção do seu eixo. A extensão dos formalismos descritos a situações mais complexas é, na maioria das vezes, trivial.

Nas secções que se seguem apresentam-se alguns métodos amplamente utilizados na determinação das matrizes de rigidez em problemas clássicos de elasticidade. Numa primeira fase são introduzidas as noções básicas de trabalho virtual e de energia potencial armazenada. Nos pontos finais deste capítulo aplicam-se estas noções à determinação das matrizes de rigidez elementares.

7.2 Princípio dos trabalhos virtuais (PTV)

Considere-se que uma qualquer partícula material P é submetida a um conjunto genérico de forças, tal como o representado esquematicamente na Figura 7.1(a). Diz-se que esta partícula tem um deslocamento virtual se este deslocamento arbitrário for de tal modo pequeno que o conjunto de forças a que o ponto está sujeito permanece inalterado ao longo desse deslocamento.

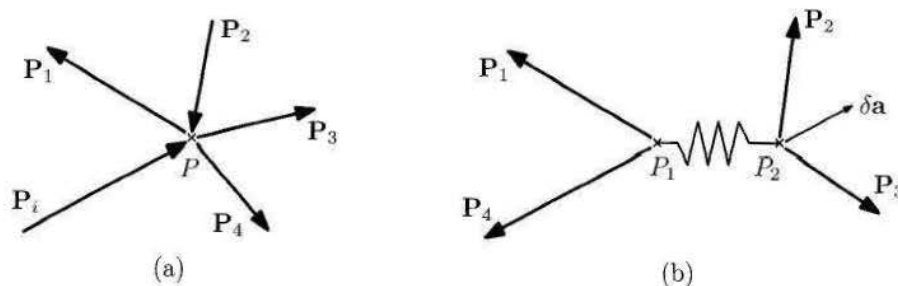


Figura 7.1 (a) Representação do sistema de forças actuante numa partícula material P e (b) deslocamento virtual δa resultante da acção de um conjunto de forças numa partícula material.

Numa situação de equilíbrio estático, a resultante das forças que actuam num determinado ponto material é nula. Assim, encarando o conjunto de forças que actuam na referida partícula como o conjunto das componentes da força resultante que nela actua, que é nula visto haver equilíbrio, então, o trabalho virtual realizado pelo referido deslocamento virtual será igualmente nulo¹. É este o postulado essencial do princípio dos trabalhos virtuais (PTV).

Considerando um corpo elástico como um conjunto de duas partículas unidas por uma mola elástica, tal como se representa de forma esquemática na Figura 7.1(b), um vector de deslocamento virtual possível seria o indicado por $\delta \mathbf{a}$, na partícula P_2 . Na situação referida, a força exercida pela mola é igual ao produto da constante de rigidez da mola, k , pelo seu alongamento, Δ , ou seja, $k\Delta$. Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais ao sistema indicado acima, chega-se a

$$\mathbf{P}_2 \cdot \delta \mathbf{a} + \mathbf{P}_3 \cdot \delta \mathbf{a} + (k\Delta) \cdot \delta \mathbf{a} = 0, \quad (7.1)$$

em que as contribuições individuais são determinadas em termos de produtos escalares (produtos internos). Uma vez que o ponto 1 não sofre qualquer deslocamento, não contribui para nenhuma parcela de trabalho. O termo $(k\Delta) \cdot \delta \mathbf{a}$ representa a alteração de energia armazenada na mola. Deste modo, ao aplicar o princípio dos trabalhos virtuais a um corpo elástico é necessário considerar as alterações de energia armazenada provocadas pelos deslocamentos virtuais.

Na Figura 7.2 mostra-se um corpo elástico Ω em equilíbrio estático nos momentos antes e depois da imposição de deslocamentos virtuais infinitesimais, e o sistema de forças que o afecta. Este deslocamento virtual provoca deformações virtuais no sólido. Estas deformações variam de ponto para ponto. No entanto, têm de ser compatíveis com os deslocamentos virtuais do sistema de forças que actua no corpo. As mudanças na energia de deformação por unidade de volume, provocadas pela deformação virtual $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$, são iguais a $\boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}$. Assim, é possível determinar a variação total de energia de deformação armazenada integrando a energia de deformação em todo o volume do sólido Ω , ou seja,

$$U = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (7.2)$$

Se existir um conjunto de n forças exteriores $\mathbf{P}_i$, cada uma com as suas componentes em cada um dos eixos do sistema $Oxyz$, tal que

¹ Pode demonstrar-se que o trabalho realizado por uma força é a soma dos trabalhos realizados por cada uma das suas componentes.

com o seguinte:

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x), \quad (7.7)$$

em que E é o módulo de elasticidade do material da barra e a deformação é, por definição,

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}. \quad (7.8)$$

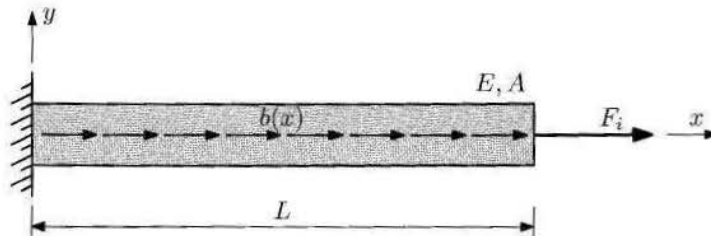


Figura 7.3 Representação esquemática de uma barra com uma extremidade fixa e submetida a um conjunto de esforços exteriores (cargas pontuais e carga distribuída).

Recordando que o princípio dos trabalhos virtuais é condição necessária e suficiente para garantir o equilíbrio estático de um sólido pode afirmar-se, no caso concreto em estudo, que

$$\int_{V_b} \delta\varepsilon \sigma dV = \int_0^L \delta u b(x) dx + \sum_{i=1}^{n_c} \delta u_i(x) F_i, \quad (7.9)$$

em que V_b é o volume total da barra, L é o seu comprimento e n_c é o número de esforços axiais aplicados na barra.

Uma vez que se considera que a barra tem secção transversal constante, para um elemento infinitesimal de volume da barra pode afirmar-se que $dV = A dx$. Introduzindo as relações 7.7 e 7.8, o princípio dos trabalhos virtuais na forma 7.9 pode ser reescrito como

$$\int_0^L \delta\varepsilon E \frac{du(x)}{dx} A dx = \int_0^L \delta u b(x) dx + \sum_{i=1}^{n_c} \delta u_i(x) F_i. \quad (7.10)$$

Para garantir o equilíbrio estático da barra basta assim determinar um campo de deslocamentos que satisfaça o PTV na forma indicada na equação 7.10. A resolução deste problema recorrendo ao método dos elementos finitos passa por

pela equação 7.5 pode ser utilizado na determinação dos esforços nodais e na construção das matrizes de rigidez elementares.

7.3 Princípio da energia potencial mínima

O primeiro membro da equação 7.5 representa o trabalho total realizado pelo conjunto das forças externas aplicadas no sólido Ω . Isto é o mesmo que dizer que representa a variação de energia potencial do sistema de forças, relativamente a uma referência nula para a energia potencial. De igual modo, o segundo membro da mesma equação representa a variação de energia potencial do corpo sólido elástico. Designando a energia potencial do sistema por Π , que consiste numa componente de acção do meio exterior sobre o sistema — os esforços externos — e outra de resposta do corpo elástico a essa acção — os esforços internos —, fica

$$\delta\Pi = - \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i^T \delta \mathbf{a}_i + \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = 0. \quad (7.6)$$

Isto é, no presuposto de existir equilíbrio, a energia potencial do sistema assume um valor extremo — máximo ou mínimo. Naturalmente, o equilíbrio estável corresponde ao mínimo da energia potencial do sistema.

7.4 Barra sujeita a carregamentos axiais

Considere-se uma barra homogênea, maciça e de secção transversal circular constante com uma extremidade fixa e sujeita a determinadas condições, tais como, por exemplo, um conjunto de esforços axiais F_i e uma carga axial distribuída $b(x)$. Estas condições estão representadas de forma esquemática na Figura 7.3.

Os esforços e deslocamentos aplicados à barra vão, naturalmente, induzir estados de tensão e de deformação em todos os pontos da barra. Uma vez que a situação apresentada é unidimensional, os tensores de tensão e de deformação podem designar-se por $\sigma(x)$ e $\varepsilon(x)$, respectivamente.

Para simplificar esta análise considere-se ainda que o material de que é construída a barra tem um comportamento linear elástico. Neste pressuposto as tensões e deformações podem relacionar-se através da lei de Hooke, de acordo

Nos parágrafos seguintes aplica-se o procedimento de aproximação da função de deslocamento descrita pela relação 7.14 ao caso concreto de uma barra de secção transversal constante, tal como a que se mostra na Figura 7.3.

7.4.1 Elemento do tipo barra unidimensional

De forma a simplificar a análise, mas, porém, sem perda de generalidade, considere-se a barra de secção transversal constante representada na Figura 7.3, submetida a uma carga axial F na sua extremidade e a uma carga uniformemente distribuída em todo o seu comprimento, aqui designada por b , e discretizada num único elemento finito, tal como se mostra na Figura 7.4. Note-se que a numeração dos elementos é colocada dentro de um círculo, de forma a distinguir-se da numeração dos nós.

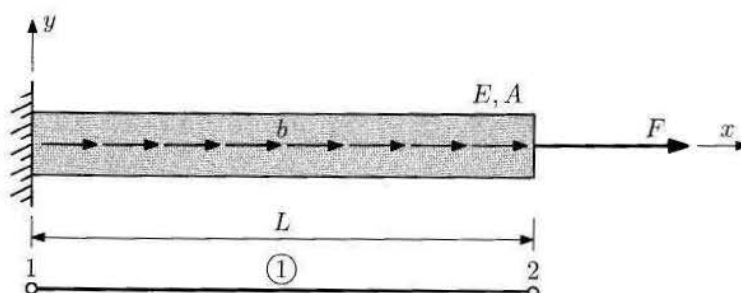


Figura 7.4 Barra submetida a um esforço axial F e a uma carga distribuída b , e a respectiva discretização num único elemento finito.

O campo de deslocamento axial da barra $u(x)$ é determinado pela seguinte função polinomial de primeiro grau:

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x. \quad (7.16)$$

Sendo x_1 e x_2 as coordenadas axiais dos nós 1 e 2 do elemento finito, respectivamente, então a função de aproximação 7.16 terá de verificar as condições seguintes:

$$u(x_1) = u_1 \quad \text{e} \quad u(x_2) = u_2, \quad (7.17)$$

em que u_1 e u_2 são os deslocamentos dos nós 1 e 2, respectivamente. Note-se que, neste caso concreto, por uma questão de simplificação e uma vez que a

obter uma aproximação para este campo de deslocamentos $u(x)$. A forma genérica mais simples para aproximar este campo de deslocamentos é, precisamente, recorrer a funções polinomiais.

Se a barra representada na Figura 7.3 for discretizada em elementos finitos, o campo de deslocamentos de cada elemento pode ser descrito por um polinómio genérico de grau n , ou seja,

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n \quad (7.11)$$

ou, de forma mais compacta,

$$u(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i. \quad (7.12)$$

Note-se que recorrendo a um polinómio de grau n o respectivo elemento finito terá $n + 1$ pontos de cálculo do deslocamento, isto é, $n + 1$ nós. Nas relações anteriores, α_i são constantes que dependem dos deslocamentos dos nós. Uma vez que se conhecem os deslocamentos nodais do elemento e , designados por u_i^e , com $i = 1, \dots, n_{\text{nos}}$, em que n_{nos} é o número de nós do elemento finito e , o campo de deslocamento $u(x)$ pode ser aproximado interpolando estes deslocamentos nodais, ou seja,

$$u(x) = N_1^e(x)u_1^e + N_2^e(x)u_2^e + \dots + N_{n^e}^e(x)u_{n^e}^e \quad (7.13)$$

ou, de forma mais compacta,

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} N_i^e(x)u_i^e. \quad (7.14)$$

De um modo genérico e como foi mencionado anteriormente, as funções de interpolação $N_i^e(x)$ designam-se usualmente por funções de forma do nó i do elemento finito e . Uma vez que os deslocamentos nodais são valores conhecidos e, portanto, constantes, então

$$\frac{du(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{dN_i^e(x)}{dx} u_i^e. \quad (7.15)$$

Introduzindo esta derivada no princípio dos trabalhos virtuais, na forma da equação 7.10, obtêm-se as equações de equilíbrio da barra em função dos deslocamentos dos seus nós.

estudo, coincide com o comprimento total da barra. Na Figura 7.5 representam-se graficamente as funções de forma $N_1(x)$ e $N_2(x)$.

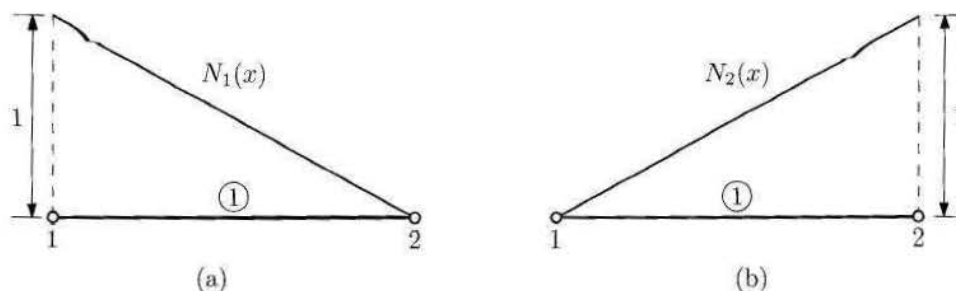


Figura 7.5 Representação gráfica das funções de forma do elemento finito utilizado na discretização da barra axial da Figura 7.4: (a) função de forma $N_1(x)$ e (b) função de forma $N_2(x)$.

Recuperando a expressão 7.15 pode calcular-se o campo de deformação axial da barra derivando $u(x)$ (ver equação 7.22), isto é,

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \sum_{i=1}^2 \frac{dN_i(x)}{dx} u_i = \frac{dN_1(x)}{dx} u_1 + \frac{dN_2(x)}{dx} u_2. \quad (7.24)$$

Calculando as derivadas das funções de forma, chega-se a

$$\varepsilon = \left(\frac{-1}{x_2 - x_1} \right) u_1 + \left(\frac{1}{x_2 - x_1} \right) u_2 \quad (7.25)$$

ou, de forma mais compacta, a

$$\varepsilon = -\frac{u_1}{L} + \frac{u_2}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L}. \quad (7.26)$$

Como se pode verificar, o campo de deformação axial na barra é constante, ou seja, é independente de x . Depende unicamente do comprimento da barra e dos deslocamentos dos seus nós. Este facto é consequência directa de as funções de forma do elemento finito serem polinómios de primeiro grau.

Os campos de deslocamentos virtuais δu e de deformações virtuais $\delta \varepsilon$ podem ser determinados seguindo procedimentos em tudo idênticos aos descritos nos parágrafos anteriores. Assim sendo, para o caso concreto apresentado na

barra é discretizada num único elemento finito, omite-se a designação do elemento. Deste modo, aplicando as condições anteriores à função de aproximação determina-se que

$$\begin{cases} u(x)|_{x=x_1} = u_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 \\ u(x)|_{x=x_2} = u_2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_2 \end{cases} \quad (7.18)$$

Resolvendo o sistema de equações 7.18, podem determinar-se as constantes α_0 e α_1 da função de aproximação do deslocamento axial da barra, isto é,

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} \\ \alpha_1 = \frac{u_1 - u_2}{x_1 - x_2} \end{cases} \quad (7.19)$$

Substituindo as relações anteriores na expressão de aproximação geral 7.16, obtém-se

$$u(x) = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} + \left(\frac{u_1 - u_2}{x_1 - x_2} \right) x, \quad (7.20)$$

que depois de alguma manipulação algébrica simples se pode reescrever, isolando os termos dependentes de u_1 e u_2 , do seguinte modo:

$$u(x) = \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right) u_1 + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) u_2 \quad (7.21)$$

ou, ainda, como

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 = \sum_{i=1}^2 N_i(x)u_i. \quad (7.22)$$

Na função de aproximação 7.22, as funções

$$N_1(x) = \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right) \quad \text{e} \quad N_2(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \quad (7.23)$$

são as funções de forma dos nós 1 e 2 do elemento finito, respectivamente. Como se pode verificar, estas funções são polinómios de primeiro grau em x e, por serem funções de interpolação, devem ser definidas unicamente para valores de $x \in [0, L]$. O denominador de ambas as funções de forma é $x_2 - x_1 = L$, ou seja, precisamente o comprimento do elemento finito, que, para o caso concreto em

O princípio dos trabalhos virtuais pode agora ser reescrito agrupando todos os termos dependentes dos deslocamentos virtuais δu_1 e δu_2 . Assim, após mais alguma manipulação algébrica chega-se a

$$\begin{aligned} & \delta u_1 \left\{ \int_0^L \left[EA \left(\frac{dN_1}{dx} \right)^2 u_1 + EA \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} u_2 - N_1 b \right] dx - F_1 \right\} \\ & + \delta u_2 \left\{ \int_0^L \left[EA \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} u_1 + EA \left(\frac{dN_2}{dx} \right)^2 u_2 - N_2 b \right] dx - F_2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Recordando que os deslocamentos virtuais são deslocamentos arbitrários, a única forma de garantir o equilíbrio definido pelo princípio dos trabalhos virtuais (equação 7.32) é obrigando a que

$$\int_0^L \left[EA \left(\frac{dN_1}{dx} \right)^2 u_1 + EA \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} u_2 - N_1 b \right] dx - F_1 = 0 \quad (7.33)$$

e

$$\int_0^L \left[EA \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} u_1 + EA \left(\frac{dN_2}{dx} \right)^2 u_2 - N_2 b \right] dx - F_2 = 0. \quad (7.34)$$

Uma vez que os deslocamentos nodais u_1 e u_2 são constantes, as duas condições anteriores podem ser agrupadas e reescritas na seguinte forma matricial:

$$EA \int_0^L \begin{bmatrix} \left(\frac{dN_1}{dx} \right)^2 & \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} \\ \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} & \left(\frac{dN_2}{dx} \right)^2 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} b dx = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (7.35)$$

ou, de uma forma mais compacta e em notação matricial, como

$$\mathbf{K}\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{f}_n. \quad (7.36)$$

Na relação matricial anterior

$$\mathbf{K} = EA \int_0^L \begin{bmatrix} \left(\frac{dN_1}{dx} \right)^2 & \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} \\ \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} & \left(\frac{dN_2}{dx} \right)^2 \end{bmatrix} dx \quad (7.37)$$

é a matriz de rigidez da barra e

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad (7.38)$$

Figura 7.4, os deslocamentos virtuais são

$$\delta u(x) = N_1(x)\delta u_1 + N_2(x)\delta u_2 = \sum_{i=1}^2 N_i(x)\delta u_i. \quad (7.27)$$

Derivando $\delta u(x)$ em ordem a x obtêm-se as deformações virtuais, na forma

$$\delta \varepsilon = \frac{d[\delta u(x)]}{dx} = \sum_{i=1}^2 \frac{dN_i(x)}{dx} \delta u_i = \frac{dN_1(x)}{dx} \delta u_1 + \frac{dN_2(x)}{dx} \delta u_2. \quad (7.28)$$

Os campos de deslocamento e de deformação determinados nos parágrafos anteriores podem agora ser introduzidos no princípio dos trabalhos virtuais, na forma apresentada na relação 7.10, obtendo-se

$$\begin{aligned} \int_0^L \left[\frac{dN_1(x)}{dx} \delta u_1 + \frac{dN_2(x)}{dx} \delta u_2 \right] EA \left[\frac{dN_1(x)}{dx} u_1 + \frac{dN_2(x)}{dx} u_2 \right] dx \\ = \int_0^L [N_1(x)\delta u_1 + N_2(x)\delta u_2] b dx + \sum_{i=1}^{n_c} \delta u_i F_i. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Assumindo que o módulo de elasticidade e a área da secção transversal da barra são constantes e reorganizando alguns termos, chega-se a

$$\begin{aligned} EA \int_0^L \left[\frac{dN_1(x)}{dx} \delta u_1 + \frac{dN_2(x)}{dx} \delta u_2 \right] \left[\frac{dN_1(x)}{dx} u_1 + \frac{dN_2(x)}{dx} u_2 \right] dx \\ - \int_0^L [N_1(x)\delta u_1 + N_2(x)\delta u_2] b dx = \delta u_1 F_1 + \delta u_2 F_2 \end{aligned} \quad (7.30)$$

ou, ainda, a

$$\begin{aligned} EA \int_0^L \left[\frac{dN_1(x)}{dx} \frac{dN_1(x)}{dx} u_1 \delta u_1 + \frac{dN_1(x)}{dx} \frac{dN_2(x)}{dx} u_2 \delta u_1 \right. \\ \left. + \frac{dN_1(x)}{dx} \frac{dN_2(x)}{dx} u_1 \delta u_2 + \frac{dN_2(x)}{dx} \frac{dN_2(x)}{dx} u_2 \delta u_2 \right] dx \\ - \int_0^L N_1(x)\delta u_1 b dx - \int_0^L N_2(x)\delta u_2 b dx = \delta u_1 F_1 + \delta u_2 F_2, \end{aligned} \quad (7.31)$$

em que F_1 é a força de reacção no nó 1 e $F_2 = F$ é a força exterior aplicada no nó 2.

em que R é a reacção no apoio e F é a carga exterior aplicada na extremidade livre da barra. Deste modo, obtém-se

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}. \quad (7.47)$$

Introduzindo a condição de fronteira $u_1 = 0$ no sistema de equações 7.46 e eliminando a equação correspondente, pode determinar-se o deslocamento u_2 como

$$\frac{EA}{L}u_2 = F + \frac{bL}{2} \Leftrightarrow u_2 = \frac{L}{EA} \left(F + \frac{bL}{2} \right).$$

Introduzindo o deslocamento u_2 na primeira equação do sistema 7.46 calcula-se a reacção no apoio, isto é,

$$-\frac{EA}{L}u_2 = R + \frac{bL}{2} \Leftrightarrow R = -(F + bL).$$

Uma vez determinados os deslocamentos e esforços nodais, e recordando as expressões 7.22 e 7.26, o campo de deslocamentos e a deformação da barra são

$$u(x) = \frac{x}{EA} \left(F + \frac{bL}{2} \right) \quad (7.48)$$

e

$$\varepsilon = \frac{1}{EA} \left(F + \frac{bL}{2} \right), \quad (7.49)$$

respectivamente.

O procedimento apresentado até este ponto leva exactamente ao mesmo resultado que se obteve no Capítulo 5. Porém, este resultado é obtido à custa de uma abordagem significativamente mais complexa. A vantagem desta abordagem é precisamente a facilidade com que se pode generalizar para discretizações com mais elementos finitos ou com elementos finitos com mais nós. Nas secções que se seguem tentar-se-á, precisamente, demonstrar este facto.

7.5 Discretização em múltiplos elementos lineares

Nos parágrafos que se seguem, apresenta-se a generalização da abordagem ao cálculo dos campos de deslocamento e de deformação numa barra recorrendo a vários elementos finitos de dois nós. De uma forma genérica, a situação que

$$\mathbf{b} = \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} b dx \quad (7.39)$$

e

$$\mathbf{f}_n = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (7.40)$$

são os vectores de deslocamentos nodais, de cargas distribuídas e de forças nodais, respectivamente.

Recordando os valores das funções de forma N_1 e N_2 , definidos nas equações 7.23, pode determinar-se que

$$\int_0^L \left(\frac{dN_1}{dx} \right)^2 dx = \int_0^L \left(\frac{dN_2}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{L} \quad (7.41)$$

e

$$\int_0^L \left(\frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} \right) dx = -\frac{1}{L} \quad (7.42)$$

Assim, para o caso apresentado, a matriz de rigidez é

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.43)$$

Como seria de esperar, discretizando a barra num único elemento finito obtém-se precisamente a mesma matriz de rigidez que se obteve no Capítulo 5 (ver, por exemplo, expressão 5.9) a partir da análise matricial de sistemas discretos.

Recorrendo às funções de forma determinadas, o vector $\mathbf{b}$ é o seguinte:

$$\mathbf{b} = \frac{bL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (7.44)$$

e o sistema de equações de equilíbrio da barra pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \frac{bL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (7.45)$$

ou, ainda,

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 + bL/2 \\ F_2 + bL/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R + bL/2 \\ F + bL/2 \end{Bmatrix}, \quad (7.46)$$

$$\mathbf{b}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \begin{Bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \end{Bmatrix} b^e dx \quad (7.53)$$

e

$$\mathbf{f}_n^e = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{Bmatrix}, \quad (7.54)$$

respectivamente. Recorde-se que os índices inferiores 1 e 2 se referem à numeração local dos nós dos elementos.

De acordo com o que foi explicado nas secções anteriores, as funções de forma $N_1^e(x)$ e $N_2^e(x)$ (vejam-se as relações 7.23) são

$$N_1^e(x) = \frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} = \frac{x_2^e - x}{L^e} \quad (7.55)$$

e

$$N_2^e(x) = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} = \frac{x - x_1^e}{L^e}. \quad (7.56)$$

Consequentemente, as derivadas das funções de forma resultam

$$\frac{dN_1^e(x)}{dx} = -\frac{1}{L^e} \quad (7.57)$$

e

$$\frac{dN_2^e(x)}{dx} = \frac{1}{L^e}. \quad (7.58)$$

Assim, substituindo as funções de forma e as suas derivadas na matriz de rigidez elementar (equação 7.50) e no vector de cargas distribuídas (equação 7.53), obtém-se

$$\mathbf{k}^e = E^e A^e \int_{x_1^e}^{x_2^e} \begin{bmatrix} \frac{1}{(L^e)^2} & -\frac{1}{(L^e)^2} \\ -\frac{1}{(L^e)^2} & \frac{1}{(L^e)^2} \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \Big|_e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.59)$$

e

$$\mathbf{b}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \begin{Bmatrix} \frac{x_2^e - x}{L^e} \\ \frac{x - x_1^e}{L^e} \end{Bmatrix} b^e dx, \quad (7.60)$$

respectivamente. Uma vez que a carga distribuída é, ou pode ser considerada, constante em cada um dos elementos finitos (podendo variar de elemento para elemento), então

agora se pretende analisar está representada esquematicamente na Figura 7.6. De forma a que o problema seja completamente genérico, vai considerar-se que a área da secção transversal da barra pode não ser constante.

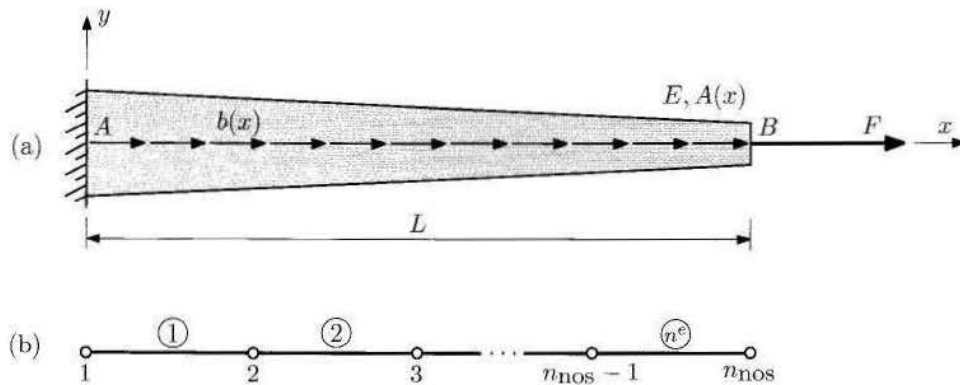


Figura 7.6 (a) Representação esquemática de uma barra de secção transversal variável, submetida a um esforço axial F e a uma carga distribuída $b(x)$, e (b) discretização em n elementos finitos.

Recordando a definição da matriz de rigidez dada pela relação 7.37, pode-se generalizar e determinar que a matriz de rigidez do elemento genérico e é dada por

$$\mathbf{k}^e = E^e A^e \int_{x_1^e}^{x_2^e} \begin{bmatrix} \left(\frac{dN_1^e}{dx} \right)^2 & \frac{dN_1^e}{dx} \frac{dN_2^e}{dx} \\ \frac{dN_1^e}{dx} \frac{dN_2^e}{dx} & \left(\frac{dN_2^e}{dx} \right)^2 \end{bmatrix} dx. \quad (7.50)$$

A área característica A^e do elemento finito e pode ser dada, para efeitos de aproximação, como a área da secção transversal na coordenada correspondente a metade do comprimento do elemento finito, isto é,

$$A^e = A(x) \Big|_{x=\frac{L^e}{2}}. \quad (7.51)$$

Seguindo o raciocínio descrito anteriormente, os vectores de deslocamentos nodais, de cargas distribuídas e de forças nodais são

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad (7.52)$$

respectivamente. O sistema global para o problema apresentado é $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$. A matriz de rigidez global depende das características geométricas do problema (comprimentos e áreas de secção transversal) e das propriedades do material utilizado (módulo de elasticidade do material, E). A solução do problema depende das cargas aplicadas e dos deslocamentos prescritos (nos apoios).

Note-se que a largura de banda da matriz de rigidez $\mathbf{K}$ depende directamente da numeração dos nós da malha de elemento finitos. A numeração apresentada na Figura 7.6 — numeração sequencial ordenada — garante que a largura de banda é mínima. Como facilmente se entenderá, a largura de banda está directamente relacionada com a rapidez de resolução do sistema de equações do problema.

Exercício 7.1. A barra representada na Figura 7.7 encontra-se encastrada numa das extremidades, tem comprimento $L = 2000$ mm e é construída em aço ($E = 210$ GPa). A área da secção transversal varia linearmente entre as extremidades, sendo $A_A = 20$ cm² e $A_B = 10$ cm². Na extremidade livre (ponto B) aplica-se uma carga axial $F = 2$ kN.

Determine o deslocamento do ponto B e a força de reacção em A :

- Discretizando a barra em um único elemento finito linear;
- Discretizando a barra em três elementos finitos lineares de igual comprimento.

Resolução

- a) Recorrendo a um só elemento finito é necessário assumir valores constantes para todos os parâmetros geométricos e de material da barra. Assim, uma vez que a área de secção transversal é variável, considera-se, para efeitos de discretização, o seu valor médio, isto é,

$$A = A^1 = \frac{A_A + A_B}{2} = \frac{20 + 10}{2} = 15 \text{ cm}^2.$$

A matriz de rigidez elementar, que nesta abordagem coincide com a matriz de rigidez global, é a seguinte:

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}^1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}^e = \frac{b}{L} \Big|_e \int_{x_1^e}^{x_2^e} \begin{Bmatrix} x_2^e - x \\ x - x_1^e \end{Bmatrix} dx = \frac{bL}{2} \Big|_e \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (7.61)$$

Seguindo o procedimento de montagem descrito pormenorizadamente na Secção 4.2 e adaptando-o ao caso unidimensional em estudo, pode determinar-se que a matriz de rigidez global é a seguinte:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k^1 & (k^1 + k^2) & -k^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 & (k^2 + k^3) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k^3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (k^{n-1} + k^n) & -k^n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k^n & k^n \end{bmatrix}, \quad (7.62)$$

em que

$$k^e = \frac{EA}{L} \Big|_e.$$

Os vectores de deslocamentos e de esforços nodais são dados por

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u^{n-1} \\ u^n \end{Bmatrix} \quad (7.63)$$

e

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} F_1^1 + \frac{bL}{2} \Big|_1^1 \\ F_2^1 + F_1^2 + \frac{bL}{2} \Big|_1^1 + \frac{bL}{2} \Big|_2^2 \\ F_2^2 + F_1^3 + \frac{bL}{2} \Big|_2^2 + \frac{bL}{2} \Big|_3^3 \\ \vdots \\ F_2^{n-1} + F_1^n + \frac{bL}{2} \Big|^{n-1} + \frac{bL}{2} \Big|^n \\ F_2^n + \frac{bL}{2} \Big|^n \end{Bmatrix}, \quad (7.64)$$

$$\mathbf{P}_i = \begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \end{Bmatrix} \quad \text{com } i = 1, \dots, n, \quad (7.3)$$

e considerando os respectivos deslocamentos virtuais infinitesimais segundo as mesmas direcções, isto é,

$$\delta \mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} \delta a_{ix} \\ \delta a_{iy} \\ \delta a_{iz} \end{Bmatrix} \quad \text{com } i = 1, \dots, n, \quad (7.4)$$

então o trabalho realizado pelas n forças exteriores $\mathbf{P}_i$ é igual à variação da energia armazenada, isto é, pelo princípio dos trabalhos virtuais resulta que

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i^T \delta \mathbf{a}_i = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (7.5)$$

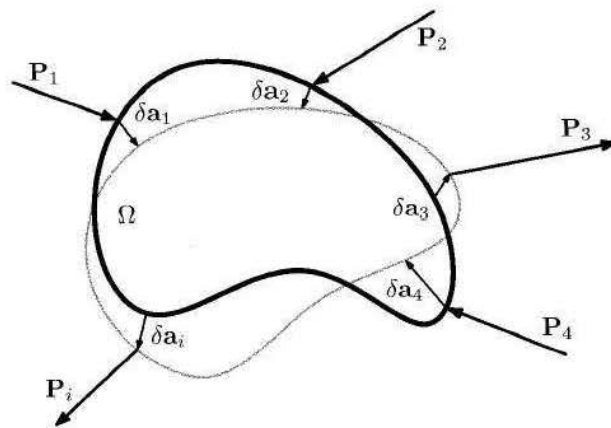


Figura 7.2 Corpo sólido e elástico Ω de volume total V , em equilíbrio estático antes e depois da aplicação de deslocamentos virtuais infinitesimais, e o sistema de forças que nele actua.

Se os carregamentos exteriores forem cargas distribuídas na superfície do corpo Ω , o primeiro membro da equação 7.5 pode ser substituído por um integral de superfície. De momento, por uma questão de simplicidade não se considera o efeito de forças volúmicas, tal como, por exemplo, a acção da gravidade. Como se verá mais à frente, o princípio dos trabalhos virtuais na forma expressa

$$= \frac{210 \times 10^9 \times 15 \times 10^{-4}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1575 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

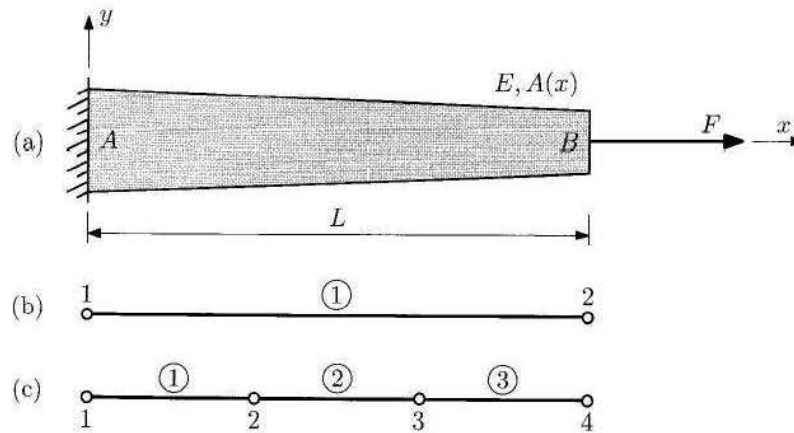


Figura 7.7 (a) Barra encastrada para o Exercício 7.1, (b) discretização em um único elemento finito linear e (c) discretização em três elementos finitos lineares de igual comprimento.

O sistema de equações do problema é $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$, ou seja,

$$1575 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^1 \\ F^2 \end{Bmatrix}.$$

Substituindo na relação anterior as condições de fronteira ($u_1 = 0$) e os esforços aplicados ($F^2 = F$), obtém-se

$$1575 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ F \end{Bmatrix},$$

em que R é a reacção no apoio A . A segunda equação do sistema anterior é

$$1575 \times 10^5 u_2 = F \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_2 = \frac{2000}{1575 \times 10^5} = 1,27 \times 10^{-5} \text{ m} = 0,0127 \text{ mm}.$$

Para determinar a reacção no apoio A recorre-se à primeira equação do sistema global, isto é,

$$-1575 \times 10^5 u_2 = R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R = -1575 \times 10^5 \times 1,27 \times 10^{-5} = -2000 \text{ N.}$$

b) Para resolver o problema recorrendo à discretização em três elementos finitos lineares (ver Figura 7.7(c)) começa-se por determinar as matrizes de rigidez de cada elemento finito, ou seja,

$$\mathbf{k}^1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}^2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{k}^3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O módulo de elasticidade de cada elemento finito é $E_1 = E_2 = E_3 = E$ e o comprimento é $L_1 = L_2 = L_3 = L/3$. Para determinar o valor médio da área da secção transversal de cada elemento é necessário, em primeiro lugar, calcular a área para $x = L/3$ e $x = 2L/3$, isto é,

$$A(x)|_{x=L/3} = A_2 = 20 - \frac{L}{3} \left(\frac{20 - 10}{L} \right) = \frac{50}{3} = 16,67 \text{ cm}^2$$

e

$$A(x)|_{x=2L/3} = A_3 = 20 - \frac{2L}{3} \left(\frac{20 - 10}{L} \right) = \frac{40}{3} = 13,33 \text{ cm}^2.$$

Depois de obtidas as áreas A_2 e A_3 , determinam-se as áreas médias em cada um dos elementos finitos, como

$$A^1 = \frac{20 + A_2}{2} = \frac{20 + \frac{50}{3}}{2} = \frac{110}{6} = 18,33 \text{ cm}^2,$$

$$A^2 = \frac{A_2 + A_3}{2} = \frac{\frac{50}{3} + \frac{40}{3}}{2} = \frac{90}{6} = 15 \text{ cm}^2$$

e

$$A^3 = \frac{A_3 + 10}{2} = \frac{\frac{40}{3} + 10}{2} = \frac{70}{6} = 11,67 \text{ cm}^2.$$

Substituindo os valores anteriores, reescrevem-se as matrizes elementares da seguinte forma:

$$\mathbf{k}^1 = \frac{3EA^1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3E}{L} \begin{bmatrix} A^1 & -A^1 \\ -A^1 & A^1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}^2 = \frac{3EA^2}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3E}{L} \begin{bmatrix} A^2 & -A^2 \\ -A^2 & A^2 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{k}^3 = \frac{3EA^3}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3E}{L} \begin{bmatrix} A^3 & -A^3 \\ -A^3 & A^3 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que o problema tem quatro graus de liberdade — os deslocamentos dos nós da malha de elementos finitos —, a matriz de rigidez global terá dimensão (4×4) e constrói-se de acordo com a relação 7.62, resultando

$$\mathbf{K} = \frac{3E}{L} \begin{bmatrix} A^1 & -A^1 & 0 & 0 \\ -A^1 & A^1 + A^2 & -A^2 & 0 \\ 0 & -A^2 & A^2 + A^3 & -A^3 \\ 0 & 0 & -A^3 & A^3 \end{bmatrix}.$$

O sistema global de equações é $\mathbf{Ka} = \mathbf{f}$, ou seja,

$$\frac{3E}{L} \begin{bmatrix} A^1 & -A^1 & 0 & 0 \\ -A^1 & A^1 + A^2 & -A^2 & 0 \\ 0 & -A^2 & A^2 + A^3 & -A^3 \\ 0 & 0 & -A^3 & A^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 + F_2^2 \\ F_3^2 + F_3^3 \\ F_4^3 \end{Bmatrix}.$$

A condição de fronteira essencial do problema é $u_1 = 0$. Por outro lado, o esforço axial no nó 1 é a reacção no apoio ($F_1^1 = R_A$) e a força nodal no

nó 4 é $F_4^3 = F$. Por equilíbrio interno dos nós, pode ainda afirmar-se que $F_2^1 + F_2^2 = F_3^2 + F_3^3 = 0$. Deste modo, o sistema global pode reescrever-se de forma simplificada, como

$$\frac{3E}{L} \begin{bmatrix} A^1 & -A^1 & 0 & 0 \\ -A^1 & A^1 + A^2 & -A^2 & 0 \\ 0 & -A^2 & A^2 + A^3 & -A^3 \\ 0 & 0 & -A^3 & A^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_A \\ 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix},$$

de onde resulta o seguinte sistema reduzido:

$$\frac{3E}{L} \begin{bmatrix} A^1 + A^2 & -A^2 & 0 \\ -A^2 & A^2 + A^3 & -A^3 \\ 0 & -A^3 & A^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}.$$

Substituindo valores, obtém-se

$$\frac{3 \times 210 \times 10^9}{2} \begin{bmatrix} 33,33 & -15 & 0 \\ -15 & 26,67 & -11,67 \\ 0 & -11,67 & 11,67 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2000 \end{Bmatrix}.$$

Da resolução do sistema de equações anterior, obtém-se

$$\begin{cases} u_2 = 3,46 \times 10^{-6} \text{ m} = 0,00346 \text{ mm} \\ u_3 = 7,70 \times 10^{-6} \text{ m} = 0,00770 \text{ mm} \\ u_4 = 1,31 \times 10^{-5} \text{ m} = 0,0131 \text{ mm} \end{cases}$$

Para determinar a reacção no apoio A recorre-se, mais uma vez, à primeira equação do sistema global, isto é,

$$\begin{aligned} R_A &= -\frac{3EA^1}{L}u_2 \\ &= -\frac{3 \times 210 \times 10^9 \times 18,33 \times 10^{-4}}{2} \times 3,46 \times 10^{-6} \\ &= -2 \text{ kN}. \end{aligned}$$

7.6 Formulação matricial

Como se determinou nas secções anteriores, o campo de deslocamentos no interior de um elemento finito linear de dois nós pode obter-se através da seguinte expressão genérica:

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 = \sum_{i=1}^2 N_i(x)u_i, \quad (7.65)$$

em que 1 e 2 representam a numeração local dos nós do elemento, e $N_1(x)$ e $N_2(x)$ são as funções de forma (funções de interpolação para os deslocamentos) do elemento finito. Em notação matricial pode escrever-se

$$\mathbf{u} = [N_1(x) \ N_2(x)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{a}^e, \quad (7.66)$$

em que, mais uma vez, $\mathbf{N}$ é a matriz das funções de forma e $\mathbf{a}^e$ é o vector de deslocamentos nodais do elemento e . Seguindo esta notação, pode determinar-se que o campo de deformações no elemento é

$$\varepsilon = \frac{dN_1(x)}{dx}u_1 + \frac{dN_2(x)}{dx}u_2 = \left[\frac{dN_1(x)}{dx} \ \frac{dN_2(x)}{dx} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{a}^e, \quad (7.67)$$

em que

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} = \frac{d}{dx} [N_1(x) \ N_2(x)]$$

é a matriz das derivadas das funções de forma.

De um modo genérico, assumindo que o material tem um comportamento linear elástico, pode ainda determinar-se o campo de tensões na barra recorrendo à lei de Hooke, como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}^e, \quad (7.68)$$

em que $\mathbf{D}$ é a matriz de elasticidade do material. Aplicando ao caso em estudo — comportamento axial de uma barra —, a matriz de elasticidade resume-se ao escalar $D = E$.

7.6.1 Princípio dos trabalhos virtuais (PTV)

O princípio dos trabalhos virtuais, formalizado como na equação 7.9, pode ser agora reescrito em forma matricial, adaptando-o ao caso unidimensional do elemento barra, isto é,

$$\int_0^{L^e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} A dx = \int_0^{L^e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dx + (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{f}_n^e, \quad (7.69)$$

em que $\mathbf{b}$ e $\mathbf{f}_n$ são os vectores de cargas distribuídas e de cargas nodais, respectivamente. A transposição dos vectores de deformação virtual ($\delta \boldsymbol{\varepsilon}$), do campo de deslocamentos virtuais ($\delta \mathbf{u}$) e de deslocamentos nodais virtuais ($\delta \mathbf{a}$) prende-se, unicamente, com a necessidade de tornar a operação matricial possível. Em rigor, uma vez que se trata de um caso unidimensional, não seria necessário recorrer à formulação matricial. Porém, desta forma tornar-se-á mais simples a relação entre este caso e abordagens mais complexas, tais como as que se desenvolverão nos capítulos seguintes.

Introduzindo no princípio dos trabalhos virtuais os campos de deformação e de tensão no elemento, dados pelas relações 7.67 e 7.68, respectivamente, obtém-se

$$\int_0^{L^e} (\mathbf{B} \delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}^e A dx = \int_0^{L^e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dx + (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{f}_n^e. \quad (7.70)$$

Ora, considerando que $\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{a}^e$ (ver equação 7.66), e depois de alguma manipulação algébrica, o princípio dos trabalhos virtuais fica

$$\int_0^{L^e} (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}^e A dx - \int_0^{L^e} (\mathbf{N} \delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{b} dx = (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{f}_n^e \quad (7.71)$$

ou, ainda,

$$\int_0^{L^e} (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}^e A dx - \int_0^{L^e} (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{N}^T \mathbf{b} dx = (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{f}_n^e. \quad (7.72)$$

Uma vez que os vectores de deslocamentos nodais virtuais e de deslocamentos nodais são constantes, pode ainda reformular-se o PTV na forma

$$(\delta \mathbf{a}^e)^T \left(\int_0^{L^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} A dx \right) \mathbf{a}^e - (\delta \mathbf{a}^e)^T \int_0^{L^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dx = (\delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{f}_n^e. \quad (7.73)$$

Considerando que, para além de ser constante, o campo de deslocamentos nodais virtuais é sempre não-nulo nos domínios considerados, então da equação anterior pode concluir-se que

$$\left(\int_0^{L^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} A dx \right) \mathbf{a}^e - \int_0^{L^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dx = \mathbf{f}_n^e. \quad (7.74)$$

Ora, comparando a expressão anterior com a formulação geral do sistema de equações do elemento finito, isto é $\mathbf{k}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{b}^e = \mathbf{f}_n^e$, pode afirmar-se que a matriz de rigidez elementar é

$$\mathbf{k}^e = \int_0^{L^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} A dx \quad (7.75)$$

e o vector de cargas distribuídas é

$$\mathbf{b}^e = \int_0^{L^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dx. \quad (7.76)$$

Como facilmente se poderá verificar, este é um procedimento perfeitamente genérico e que, como se verá em capítulos seguintes, poderá ser facilmente utilizado para determinar os sistemas de equações elementares de outros tipos de elementos finitos.

De uma forma esquemática, o procedimento genérico para a resolução de um problema pelo método dos elementos finitos pode descrever-se do seguinte modo:

Procedimento de aplicação do método dos elementos finitos

1. Discretização

Dividir a estrutura num conjunto de elementos discretos: os elementos finitos.

2. Cálculos elementares

Determinar as matrizes de rigidez elementares, os vectores de forças distribuídas e os vectores de forças nodais elementares, de acordo com as expressões

$$\mathbf{k}^e = \int_0^{L^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} A dx.$$

$$\mathbf{b}^e = \int_0^{L^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dx$$

e

$$\mathbf{f}^e = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{Bmatrix},$$

respectivamente.

3. Assemblagem

Assemblar as matrizes de rigidez elementares e os vectores de forças nodais e de forças distribuídas elementares para construir o sistema global de equações

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}.$$

4. Redução do sistema

Introdução das condições de fronteira do problema (deslocamentos prescritos) e dos carregamentos exteriores, e eliminação das equações correspondentes a deslocamentos prescritos nulos, de forma a construir o sistema reduzido, isto é,

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{a} = \bar{\mathbf{f}}.$$

5. Resolução

Resolução do sistema de equações reduzido e determinação dos graus de liberdade do problema (por exemplo, deslocamentos nodais). Esta fase pode ser levada a cabo, por exemplo, por inversão da matriz de rigidez, isto é,

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{a} = \bar{\mathbf{f}} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \bar{\mathbf{K}}^{-1}\bar{\mathbf{f}}.$$

6. Tensões e deformações

Determinação dos campos de deformações e de tensões do problema recorrendo às seguintes relações:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}.$$

7.7 Elementos unidimensionais de grau superior

Conforme se viu na Secção 7.4, o campo de deslocamentos de cada elemento finito de uma barra pode ser descrito por um polinómio genérico de grau n (ver equação 7.11)

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i. \quad (7.77)$$

O polinómio de interpolação de grau n tem $n + 1$ pontos para cálculo dos deslocamentos, isto é, $n + 1$ nós. Conhecendo os deslocamentos nodais do elemento e , designados por u_i^e , com $i = 1, \dots, n_{\text{nos}}$, em que n_{nos} é o número de nós do elemento finito e , o campo de deslocamento $u(x)$ é determinado por interpolação dos deslocamentos nodais, ou seja,

$$u(x) = N_1^e(x)u_1^e + N_2^e(x)u_2^e + \dots + N_{n_{\text{nos}}}^e(x)u_{n_{\text{nos}}}^e = \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} N_i^e(x)u_i^e. \quad (7.78)$$

De um modo genérico, qualquer função de forma polinomial poderá ser determinada recorrendo ao polinómio genérico de Lagrange. O polinómio de Lagrange de grau $n - 1$, associado ao nó i , é

$$N_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (7.79)$$

De forma mais compacta, o polinómio geral de Lagrange pode escrever-se como

$$N_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}. \quad (7.80)$$

Veja-se, a título de exemplo, que as funções de forma do elemento do tipo barra linear utilizado na Secção 7.4 podem ser determinadas recorrendo à expressão 7.80, com $n = 2$ e $i = 1, \dots, n$, isto é,

$$N_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x - x_2}{L^e}$$

e

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{L^e}.$$

Estas funções são, precisamente, as funções de forma representadas graficamente na Figura 7.5.

Por uma questão de uniformização de análise adoptar-se-á, a partir de agora um sistema de coordenadas genérico. Este sistema de coordenadas, designado por $O\xi$, é definido de forma a normalizar o comprimento do elemento finito, isto é, neste sistema o elemento finito tem comprimento $L^e = 2$ e as coordenadas dos nós dos extremos são sempre $\xi_1 = -1$ e $\xi_{n_{\text{nos}}} = +1$. A relação de transformação de coordenadas entre este sistema normalizado e o sistema de eixos Ox , utilizado até agora, pode ser definida da seguinte forma:

$$\xi = \frac{2}{L^e}(x - x_c), \quad (7.81)$$

em que x_c é a coordenada do ponto central do elemento finito.

A utilização de um referencial normalizado está directamente relacionada com o conceito de referencial isoparamétrico, que será descrito e desenvolvido de forma detalhada no Capítulo 8. A utilização de um referencial normalizado isoparamétrico para discretizar os elementos finitos tem vantagens do ponto de vista da automatização do cálculo numérico a efectuar. Tal deve-se a que, do ponto de vista da formulação isoparamétrica, os domínios de integração ao nível de cada elemento finito sejam sempre os mesmos, independentemente do tamanho e do grau de distorção de cada elemento em particular. Desta forma, as funções de interpolação a utilizar deixam de ser influenciadas pela geometria real de cada elemento, passando a depender apenas da representação dos elementos no sistema (espaço) normalizado.

Para o elemento do tipo barra de três nós obtêm-se funções de forma polinomiais de segundo grau. Recorrendo à expressão genérica dos polinómios de Lagrange (ver equação 7.80), pode determinar-se a função de forma do nó 1 ($N_1(\xi)$) para o elemento finito de três nós, obtendo-se

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \prod_{j=1 \atop (j \neq 1)}^3 \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_1 - \xi_j)} \\ &= \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} \\ &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1). \end{aligned} \quad (7.82)$$

De modo semelhante, obtêm-se as funções de forma para os nós 2 e 3, isto é, as funções $N_2(\xi)$ e $N_3(\xi)$, respectivamente, ou seja,

$$N_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = \frac{[\xi - (-1)](\xi - 1)}{[0 - (-1)](0 - 1)} = -(\xi + 1)(\xi - 1) \quad (7.83)$$

e

$$N_3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = \frac{[\xi - (-1)](\xi - 0)}{[1 - (-1)](1 - 0)} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1). \quad (7.84)$$

As funções de forma agora determinadas são as representadas graficamente na Figura 7.8.

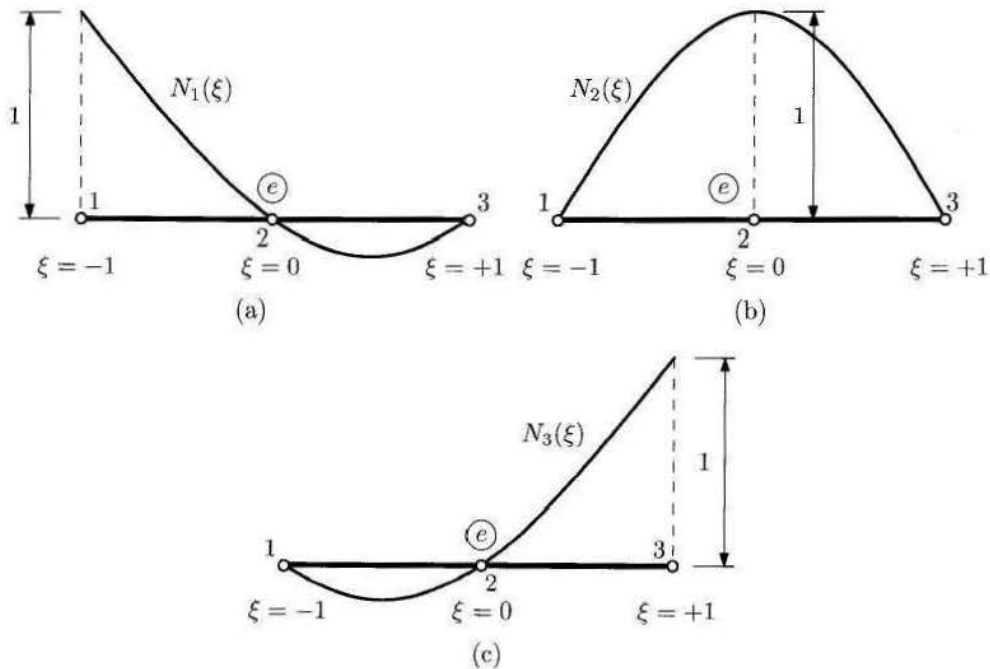


Figura 7.8 Funções de forma polinomiais (polinômios de Lagrange de segundo grau) para o elemento do tipo barra de três nós: (a) $N_1(\xi)$, (b) $N_2(\xi)$ e (c) $N_3(\xi)$.

Prosseguindo com o mesmo raciocínio, para o elemento barra de quatro nós obtêm-se funções de forma polinomiais de terceiro grau. Recorrendo, mais uma vez, à expressão genérica dos polinômios de Lagrange (ver equação 7.80), pode determinar-se a função de forma do nó 1 ($N_1(\xi)$) para o elemento finito de quatro nós, isto é,

$$\begin{aligned}
N_1(\xi) &= \prod_{j=1 \atop (j \neq 1)}^4 \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_1 - \xi_j)} = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_4)} \\
&= \frac{[\xi - (-\frac{1}{3})](\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1)}{[-1 - (-\frac{1}{3})](-1 - \frac{1}{3})(-1 - 1)} \\
&= -\frac{1}{16}(3\xi + 1)(3\xi - 1)(\xi - 1).
\end{aligned} \tag{7.85}$$

As restantes funções de forma para o elemento de quatro nós determinam-se de forma semelhante, obtendo-se

$$\begin{aligned}
N_2(\xi) &= \frac{9}{16}(\xi + 1)(\xi - 1)(3\xi - 1) \\
N_3(\xi) &= -\frac{9}{16}(\xi + 1)(\xi - 1)(3\xi + 1) \\
N_4(\xi) &= \frac{1}{16}(\xi + 1)(3\xi + 1)(3\xi - 1)
\end{aligned} \tag{7.86}$$

As funções de forma agora determinadas são as representadas graficamente na Figura 7.9.

7.8 Integração numérica

Frequentemente, a determinação das matrizes de rigidez elementares recorrendo ao integral 7.75 implica que tenham de ser calculados integrais relativamente complexos. Assim, é útil que se proponham métodos aproximados, mais eficientes e de fácil implementação numérica, para determinar estes mesmos integrais, com vantagens adicionais na integração em domínios bi- e tridimensionais, tal como se verá nos capítulos seguintes. Um dos processos mais expeditos para realizar esta tarefa é recorrer à quadratura de Gauss-Legendre. Segundo este método, de um modo geral, pode determinar-se o integral de uma função genérica $f(\xi)$ da seguinte forma:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^p f(\xi_i) w_i, \tag{7.87}$$

em que p é a ordem da quadratura de Gauss-Legendre, correspondente ao número de pontos de integração, e w_i é o peso de integração, correspondente ao ponto de integração e associado ao valor $f(\xi_i)$. Na Tabela 7.1 mostram-se os

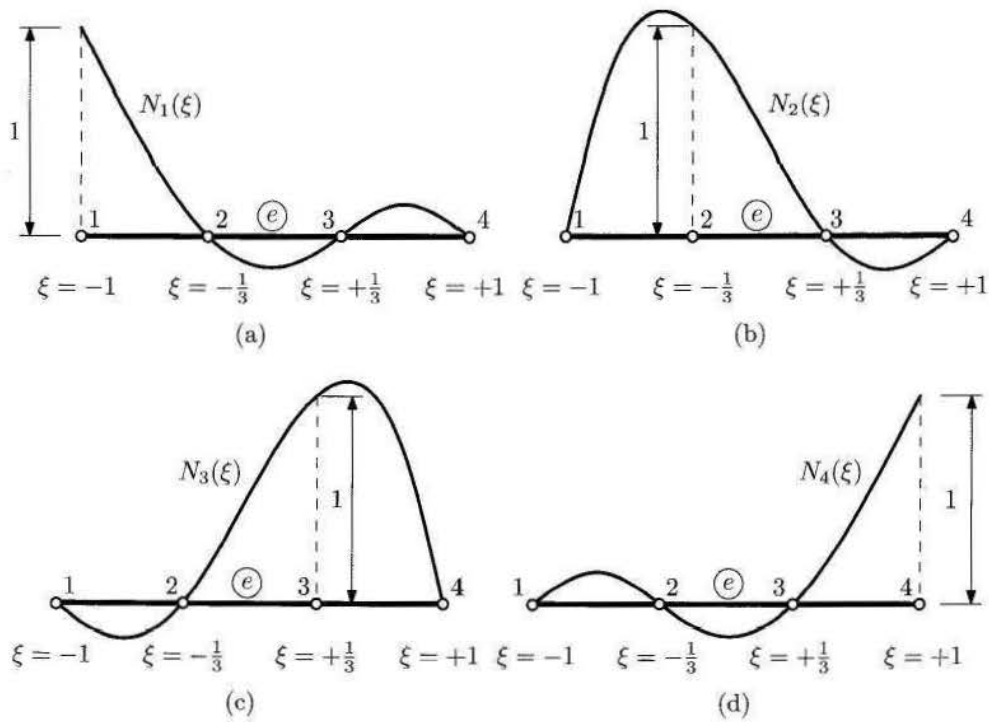


Figura 7.9 Funções de forma polinomiais (polinômios de Lagrange de terceiro grau) para o elemento do tipo barra de quatro nós: (a) $N_1(\xi)$, (b) $N_2(\xi)$, (c) $N_3(\xi)$ e (d) $N_4(\xi)$.

pares de valores coordenada-peso de integração para as sete primeiras quadraturas de Gauss-Legendre, ou seja, as sete primeiras ordens de integração, no espaço normalizado $-1 \leq \xi \leq +1$.

Uma quadratura de Gauss-Legendre de ordem p integra de forma exacta um polinómio de grau $2p - 1$ (ou inferior). Adicionalmente, o erro de cálculo do integral por este método é da ordem de ρ^{2n} , sendo ρ a distância entre os pontos de integração.

A mero título de exemplo, imagine-se que é necessário determinar o integral do seguinte polinómio de terceiro grau:

$$f(x) = 4 + 3x + 2x^2 + x^3.$$

O valor exacto do integral da função $f(x)$ para $-1 \leq x \leq +1$ é

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x)dx = \left(4x + \frac{3x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-1}^{+1} = 8 + \frac{4}{3} = 9,333.$$

Tabela 7.1 Coordenadas ξ_i e pesos de integração w_i para as sete primeiras ordens de integração (n) da quadratura de Gauss-Legendre.

n	ξ_i	w_i
1	0	2
2	$\pm 0,577350269$	1
3	$\pm 0,774596669$	0,555555556
	0	0,888888889
4	$\pm 0,861136312$	0,347854845
	$\pm 0,339981044$	0,652145155
5	$\pm 0,906179846$	0,236926885
	$\pm 0,538469310$	0,478628670
	0	0,568888889
6	$\pm 0,932469514$	0,171324492
	$\pm 0,661209386$	0,360761573
	$\pm 0,238619186$	0,467913935
7	$\pm 0,949107912$	0,129484966
	$\pm 0,741531186$	0,279705391
	$\pm 0,405845151$	0,381830051
	0	0,417959184

Calculando o mesmo integral com uma quadratura de Gauss-Legendre de primeira ordem, isto é, com $p = 1$, e recorrendo à expressão 7.87 e aos valores indicados na Tabela 7.1, obtém-se

$$I \approx \sum_{i=1}^1 f(x_i)w_i = f(x_1)w_1 = f(0) \times 2 = 4 \times 2 = 8.$$

Calculando o integral recorrendo agora a uma quadratura de Gauss-Legendre de segunda ordem, isto é, com $p = 2$, obtém-se

$$\begin{aligned} I &\approx \sum_{i=1}^2 f(x_i)w_i = f(x_1)w_1 + f(x_2)w_2 = \\ &= 2,742 \times 1 + 6,591 \times 1 = 9,333. \end{aligned}$$

Como se pode verificar, para obter o resultado exacto da integração de um polinómio de terceiro grau basta uma quadratura de Gauss-Legendre de ordem

$p = 2$, ou seja, verifica-se a regra de que uma quadratura de Gauss-Legendre de ordem p integra de forma exacta um polinómio de grau $2p - 1$.

Referências Bibliográficas

1. Bathe, K.-J. *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Nova Jérsea, Estados Unidos da América, 1996.
2. Crisfield, M.A. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures — Essentials*, Vol. 1, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido, 1996.
3. Fish, J., Belytschko T. *A First Course in Finite Elements*, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido, 2007.
4. Hughes, T.J.R. *The Finite Element Method — Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2000.
5. Oñate, E. *Structural Analysis with the Finite Element Method — Linear Statics: Basis and Solids*, Vol. 1, Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences, Springer-Verlag, Berlim, Alemanha, 2009.
6. Reddy, J.N. *An Introduction to the Finite Element Method*, 3.^a edição, McGraw-Hill, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2005.
7. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method — The Basis*, Vol. 1, 5.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2000.
8. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method — Solid Mechanics*, Vol. 2, 5.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2000.

Resumo Neste capítulo apresentam-se conceitos inerentes a formulações de elementos finitos em duas dimensões, particularmente úteis em problemas de estado plano de tensão e estado plano de deformação. Analisam-se as equações de base para elementos lagrangianos triangulares e quadriláteros com diferentes graus de interpolação. Introduce-se, de forma detalhada, o conceito de interpolação isoparamétrica. No caso dos elementos triangulares, é dada especial atenção à utilização de coordenadas de área na formulação de elementos de deformação constante. Desenvolvem-se as funções de forma para elementos quadriláteros lineares e de ordem mais elevada. Recorre-se novamente aos polinómios de Lagrange, agora no contexto de elementos em duas dimensões. A análise sistemática dos conceitos de discretização e formulação isoparamétrica para duas dimensões serve de base à formulação de elementos axissimétricos e, de igual modo, constitui o ponto de partida para a análise de formulações de elementos finitos em três dimensões.

8.1 Introdução

Uma grande variedade de problemas de engenharia pode ser analisada do ponto de vista de uma formulação bidimensional de elementos finitos. Tipicamente, estruturas com carregamentos que induzem estados planos de tensão ou, em alternativa, de deformação, enquadram-se na categoria de problemas passíveis de serem tratados e analisados pelo método dos elementos finitos recorrendo a uma análise bidimensional.

Considere-se, por exemplo, a análise de estruturas ou de meios contínuos para os quais uma das direcções principais de tensão em todos os seus pontos é conhecida à partida, sendo um exemplo típico o estado de tensão numa placa fina quando submetida a esforços ou carregamentos exclusivamente contidos no seu plano médio. Neste caso, admite-se que a componente de tensão ao longo da direcção perpendicular a esse plano é nula, assim como as tensões de corte associadas a essa direcção. Assim, esta direcção está associada a uma tensão principal nula.

No caso de um estado plano de deformação, e analogamente ao que ocorre no estado plano de tensão, também uma das direcções principais é conhecida e, associada a essa direcção principal, a deformação normal é considerada nula, bem como as deformações angulares associadas a essa direcção. Tipicamente, estruturas sujeitas a estados planos de deformação apresentam uma das suas dimensões significativamente superior às restantes, estando ainda sujeitas a um estado de deformação não-nulo exclusivamente em planos perpendiculares ao eixo que define essa dimensão predominante. Um caso típico de uma estrutura passível de ser analisada através da hipótese de deformação plana é, por exemplo, um dique ou um túnel com uma das suas dimensões (comprimento) muito superior às da sua secção recta, quando sujeitos apenas a carregamentos que não induzam componentes de deformação ao longo da dimensão dominante.

Em qualquer um dos casos anteriormente referidos, é possível realizar uma análise por simulação numérica modelando e discretizando apenas a secção recta representativa do problema, atribuindo a essa secção elementos finitos bidimensionais (tipicamente triangulares ou quadrangulares). Os tensores das tensões e das deformações não contêm, nesse caso, todas as componentes típicas de uma análise tridimensional, o que simplifica bastante a análise e o esforço computacional de cálculo a ela associado.

Neste capítulo, partindo das definições e da introdução ao método dos elementos finitos realizadas nos capítulos anteriores, generaliza-se a análise isoparamétrica lagrangiana para um domínio com duas dimensões. Formulações para elementos finitos triangulares de três nós e quadriláteros de quatro nós, de utilização frequente, são estudados em detalhe, não deixando de lado, no entanto, discretizações utilizando elementos finitos de ordem mais elevada, cujas funções interpoladoras são obtidas através do polinómio de Lagrange e do triângulo de Pascal. Especial detalhe será dado na obtenção e na utilização das funções de forma quer em coordenadas cartesianas quer em coordenadas naturais, e a sua utilização na definição dos operadores diferenciais e das matrizes de rigidez elementares. Serão abordadas também a definição e a utilização de coordenadas de

área, como alternativa de interesse prático na formulação de elementos finitos triangulares com distintos graus de interpolação. No final do capítulo, será feita uma introdução à formulação dos elementos finitos axissimétricos como uma extensão natural da formulação bidimensional apresentada, servindo também como base para a formulação tridimensional, que será apresentada no Capítulo 9.

8.2 Relações entre tensão e deformação

Para um determinado estado de tensão definido pelas componentes do tensor de tensões σ_{xx} , τ_{xy} , τ_{xz} , etc., é possível determinar as componentes de deformação em qualquer uma das direcções do sistema de eixos global $Oxyz$. Para tal, basta sobrepor, ou seja, somar as componentes de deformação nessa direcção provocadas por cada uma das componentes individuais de tensão. Por exemplo, de acordo com a lei de Hooke, a tensão normal σ_{xx} produz uma deformação de magnitude

$$\frac{\sigma_{xx}}{E}$$

na direcção do eixo Ox . Por sua vez, as componentes σ_{yy} e σ_{zz} produzem deformações de magnitude

$$-\frac{\nu\sigma_{yy}}{E} \quad \text{e} \quad -\frac{\nu\sigma_{zz}}{E},$$

respectivamente, também na direcção de Ox . Nas quantidades anteriores, E é o módulo de elasticidade, ou módulo de Young, do material, e ν o respectivo coeficiente de Poisson. Assim, sobrepondo as três componentes de deformação linear agora referidas, obtém-se o seguinte resultado:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \quad (8.1)$$

Procedendo de modo idêntico para ε_{yy} e ε_{zz} , obtém-se

$$\begin{cases} \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases} \quad (8.2)$$

Por outro lado, as deformações angulares são dadas por

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{cases}, \quad (8.3)$$

em que G é o módulo de corte do material (ou módulo de elasticidade transversal), definido como

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (8.4)$$

8.3 Estados planos de deformação e de tensão

O estudo de problemas estruturais em duas dimensões que podem ser caracterizados por estados planos de tensão ou de deformação baseia-se na descrição cinemática do movimento através, por exemplo, do campo de deslocamentos de um dado ponto. Este campo de deslocamentos pode ser descrito como

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}, \quad (8.5)$$

ou seja, em função das suas componentes segundo um sistema de eixos coordenados ortogonal Oxy associado ao plano em causa.

A descrição cinemática do campo de deslocamentos através das suas componentes cartesianas é exactamente igual à adoptada na análise discreta de elementos finitos do tipo viga, descrita no Capítulo 7.

Aplicando o conceito de deformação infinitesimal da mecânica dos meios contínuos, ou mecânica dos sólidos, as componentes cartesianas da deformação linear (por vezes designada por extensão) e da deformação angular (por vezes designada por distorção) podem ser dadas por

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (8.6)$$

e

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \quad (8.7)$$

respectivamente.

A componente de deformação segundo a direcção perpendicular ao plano Oxy , isto é, a componente de deformação ε_{zz} pode ser nula ($\varepsilon_{zz} = 0$). Este caso caracteriza-se, assim, por representar um estado plano de deformação. Em alternativa, aquela componente de deformação pode ser diferente de zero ($\varepsilon_{zz} \neq 0$), representando assim um estado plano de tensão. Neste caso, a deformação ε_{zz} deve ser determinada a partir do campo de tensões, para o qual a componente de tensão σ_{zz} é nula, isto é, $\sigma_{zz} = 0$. Consequentemente, o campo de tensões associado ao campo de deformações pode ser descrito pelas seguintes componentes cartesianas:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (8.8)$$

que podem ser obtidas através da relação constitutiva

$$\sigma = D\varepsilon. \quad (8.9)$$

No caso de relações constitutivas isotrópicas lineares — referentes a materiais isotrópicos com comportamento linear elástico —, a matriz D é função das propriedades elásticas do material, isto é, do módulo de elasticidade do material, E , e do coeficiente de Poisson, ν .

Na sua forma generalizada ao estado tridimensional de tensão e de deformação, a lei de Hooke, dada pela relação constitutiva 8.9, pode ser escrita de forma estendida como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = D \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (8.10)$$

em que

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}. \quad (8.11)$$

Nos parágrafos que se seguem, obtêm-se, a partir da equação anterior, as relações constitutivas para os estados planos de tensão e de deformação.

Quando, por exemplo, uma placa fina é submetida a um conjunto de carregamentos no seu próprio plano, diz-se que se está na presença de um estado plano de tensão. Considerando que a direcção normal ao plano da referida placa é a do eixo Oz , então, nesta situação,

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (8.12)$$

Por outro lado, num estado plano de deformação, as componentes de deformação na direcção do eixo Oz são nulas, ou seja,

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad (8.13)$$

No entanto, para que esta condição se mantenha, tem de existir uma componente de tensão

$$\sigma_{zz} \neq 0.$$

Nas Figuras 8.1(a) e (b) podem ver-se representações esquemáticas de situações que induzem um estado plano de tensão e um estado plano de deformação, respectivamente.

Retomando as condições que definem o estado plano de tensão, em geral existem deformações na direcção da normal ao plano, isto é, $\varepsilon_{zz} \neq 0$. Estas deformações são causadas pelo efeito de Poisson. Consequentemente, introduzindo as igualdades 8.12 nas relações 8.1 a 8.3 e considerando a relação 8.4, as componentes de deformação resultam

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu\sigma_{yy}}{E} \\ \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} \\ \gamma_{xy} = \tau_{xy} \frac{2(1+\nu)}{E} \end{cases}. \quad (8.14)$$

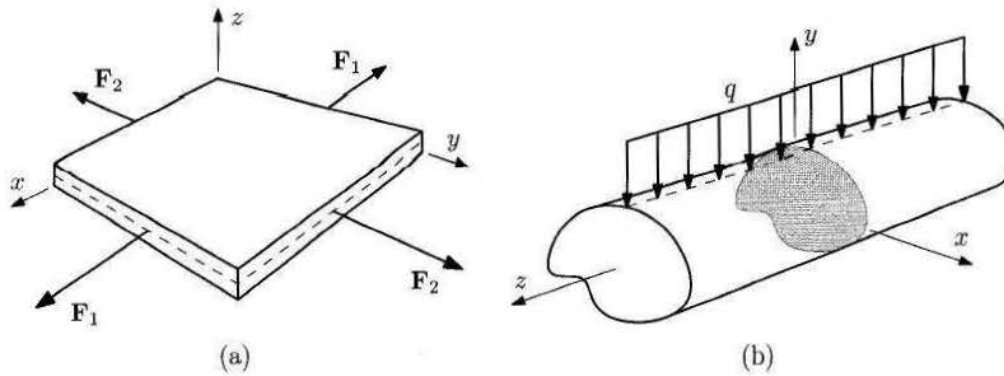


Figura 8.1 Representação esquemática de uma situação que induz (a) um estado plano de tensão no plano Oxy e (b) um estado plano de deformação no plano Oxy .

Reescrevendo as relações anteriores em ordem às componentes de tensão, obtém-se

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{cases} \quad (8.15)$$

As relações tensão-deformação anteriores podem escrever-se de forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8.16)$$

ou, ainda,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{\text{TP}} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (8.17)$$

em que $\mathbf{D}^{\text{TP}}$ é a matriz de elasticidade para o caso particular do estado plano de tensão. Note-se, no entanto, que num estado plano de tensão se tem também que

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \quad (8.18)$$

Relativamente ao estado plano de deformação, introduzindo as igualdades 8.13 nas relações 8.1 a 8.3 e considerando a relação 8.4, obtém-se

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{cases} \quad (8.19)$$

e

$$0 = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]. \quad (8.20)$$

Introduzindo a relação 8.20 nas equações 8.19, estas podem ser reescritas de forma a determinar as componentes de tensão não-nulas, isto é,

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy}] \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{cases} \quad (8.21)$$

As expressões anteriores podem ainda agrupar-se de forma matricial do seguinte modo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8.22)$$

ou, ainda,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{\text{DP}} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (8.23)$$

em que $\mathbf{D}^{\text{DP}}$ é a matriz de elasticidade para o estado plano de deformação. Refira-se que num estado plano de deformação também se verifica a equação 8.20, ou seja,

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \quad (8.24)$$

8.4 Introdução aos elementos finitos bidimensionais

Nos parágrafos que se seguem apresenta-se a formulação detalhada do elemento finito triangular de três nós. Descrevem-se ainda os procedimentos para determinação dos correspondentes estados de deformação e de tensão.

8.4.1 Elementos finitos triangulares

Os elementos finitos triangulares são dos mais versáteis e de formulação mais simples no âmbito de aplicações bidimensionais. Em termos de geração de malhas, é possível discretizar qualquer figura geométrica plana recorrendo à utilização (parcial ou total) de elementos triangulares. Em termos de malhas não-estruturadas, a utilização de elementos finitos triangulares permite realizar, de forma simples, o refinamento local em zonas com elevados gradientes de tensão e/ou de deformação mantendo-se, por exemplo, outras zonas da mesma malha com um nível de refinamento relativamente mais grosseiro. Esta é uma das principais razões para que muitos programas comerciais de simulação pelo método dos elementos finitos apresentem nas suas bibliotecas de elementos finitos apenas elementos triangulares — para resolução de problemas bidimensionais — e os seus equivalentes tetraédricos — para discretização de meios tridimensionais (volumes). Na Figura 8.2 mostra-se um exemplo de discretização de uma geometria complexa em elementos finitos triangulares com refinamento localizado.

No entanto, a maior desvantagem das formulações baseadas na discretização em elementos triangulares, nomeadamente quando se recorre a elementos de três nós, prende-se com a baixa acuidade dos resultados obtidos quando comparados, por exemplo, com o desempenho de elementos finitos quadriláteros de quatro nós. Porém, a sua simplicidade justifica o seu tratamento nesta obra, quer do ponto de vista pedagógico quer como introdução para formulações mais complexas.

Considere-se o elemento finito triangular de três nós genérico, representado na Figura 8.3, referenciado relativamente a um sistema de eixos cartesianos ortogonais Oxy . Relativamente a este sistema de eixos coordenados, o vector de coordenadas do nó i do elemento genérico e é o seguinte:

$$\mathbf{x}_i^e = \begin{Bmatrix} x_i^e \\ y_i^e \end{Bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 3. \quad (8.25)$$

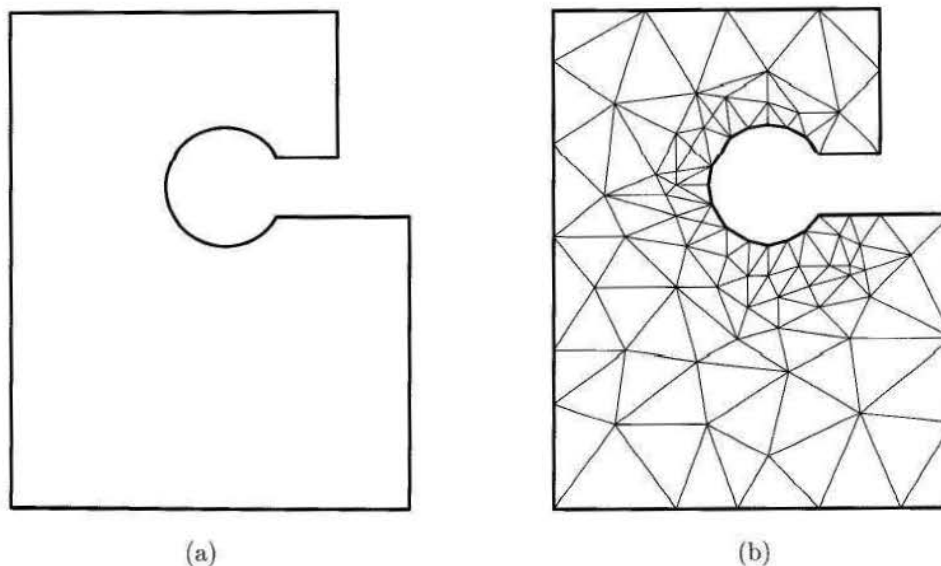


Figura 8.2 Exemplo de discretização de uma geometria complexa em elementos finitos triangulares com refinamento localizado: (a) geometria do problema e (b) discretização em elementos finitos triangulares.

Na representação da Figura 8.3 adota-se a convenção de numerar os nós do elemento finito no sentido contrário aos dos ponteiros do relógio. A formulação que se apresenta nos parágrafos seguintes (e consequentes definições) assenta neste pressuposto. De forma análoga, os graus de liberdade para cada nó podem ser representados vectorialmente na seguinte forma:

$$\mathbf{u}_i^e = \begin{Bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \end{Bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 3, \quad (8.26)$$

englobando os graus de liberdade dos deslocamentos horizontal e vertical em cada nó, u_i^e e v_i^e , respectivamente. Implicitamente, nas equações anteriores encontra-se o conceito de numeração local dos nós para cada elemento, de onde resulta a inclusão do índice e , especificando um elemento finito particular para análise. Por outro lado, no caso de ser utilizada a numeração global dos nós na malha completa de elementos finitos, as equações 8.25 e 8.26 assumem a forma

$$\mathbf{x}_k = \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_k = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \end{Bmatrix}, \quad k = 1, \dots, N_{\text{nos}}, \quad (8.27)$$

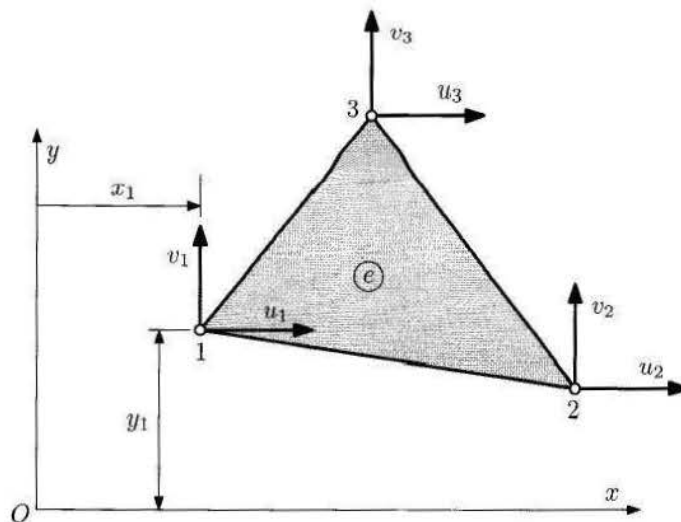


Figura 8.3 Representação esquemática do elemento finito triangular de três nós genérico e respectivos graus de liberdade.

em que N_{nos} designa o número total de nós da malha de elementos finitos.

Os seis graus de liberdade de deslocamento do elemento e podem ser representados de forma compacta como

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^e \\ \mathbf{u}_2^e \\ \mathbf{u}_3^e \end{Bmatrix}. \quad (8.28)$$

A interpolação do campo de deslocamentos no interior do elemento finito pode ser realizada, por exemplo, de forma simples, recorrendo a funções de interpolação lineares, ou seja,

$$\begin{cases} u^e(x, y) = c_1^e + c_2^e x + c_3^e y \\ v^e(x, y) = c_4^e + c_5^e x + c_6^e y \end{cases} \quad (8.29)$$

Note-se que as expressões anteriores são generalizações, para duas dimensões, das funções de aproximação unidimensionais utilizadas no Capítulo 7. Para determinar o valor das seis constantes c_i ($i = 1, \dots, 6$) presentes nas equações anteriores, é necessário reescrever estas mesmas equações para cada uma das componentes de deslocamento dos nós. Assim, por exemplo, para as componentes de deslocamento horizontal pode escrever-se que

$$\begin{cases} u_1^e = c_1^e + c_2^e x_1^e + c_3^e y_1^e \\ u_2^e = c_1^e + c_2^e x_2^e + c_3^e y_2^e \\ u_3^e = c_1^e + c_2^e x_3^e + c_3^e y_3^e \end{cases} \quad (8.30)$$

ou, de forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1^e \\ c_2^e \\ c_3^e \end{Bmatrix}. \quad (8.31)$$

O sistema de equações representado na equação 8.31 pode ser facilmente resolvido de forma a determinar os coeficientes c_i ($i = 1, \dots, 3$), obtendo-se

$$\begin{cases} c_1^e = \frac{1}{2A^e} [u_1^e (x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e) + u_2^e (x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e) + u_3^e (x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e)] \\ c_2^e = \frac{1}{2A^e} [u_1^e (y_2^e - y_3^e) + u_2^e (y_3^e - y_1^e) + u_3^e (y_1^e - y_2^e)] \\ c_3^e = \frac{1}{2A^e} [u_1^e (x_3^e - x_2^e) + u_2^e (x_1^e - x_3^e) + u_3^e (x_2^e - x_1^e)] \end{cases}, \quad (8.32)$$

em que A^e é a área do elemento triangular, que pode ser determinada recorrendo ao determinante da matriz do sistema de equações 8.31, isto é,

$$2A^e = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix}. \quad (8.33)$$

Substituindo as constantes dadas pelas equações 8.32 nas relações 8.29 obtém-se a expressão com a qual se pode calcular a componente de deslocamento horizontal u num qualquer ponto (x, y) no interior do elemento e , isto é,

$$u^e = \frac{1}{2A^e} [(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y) u_1^e + (\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y) u_2^e \quad (8.34)$$

$$+ (\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y) u_3^e], \quad (8.35)$$

em que

$$\begin{cases} \alpha_i = x_j y_k - x_k y_j \\ \beta_i = y_j - y_k \\ \gamma_i = x_k - x_j \end{cases}. \quad (8.36)$$

Os coeficientes i , j e k são obtidos por permutação cíclica como se mostra na Figura 8.4, isto é, se $i = 1$, então $j = 2$ e $k = 3$, se $i = 2$, então $j = 3$ e $k = 1$, e se $i = 3$, então $j = 1$ e $k = 2$.

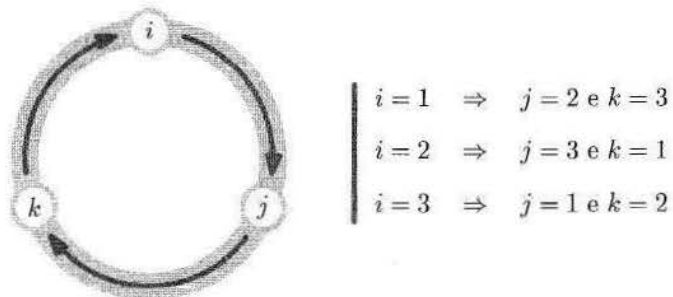


Figura 8.4 Procedimento de permutação cíclica para determinação dos coeficientes i , j e k .

Consequentemente, é agora possível definir as funções de interpolação — funções de forma — para o nó i do elemento e , em relação ao sistema de coordenadas Oxy , na seguinte forma:

$$N_i^e = N_i^e(x, y) = \frac{1}{2A^e} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y). \quad (8.37)$$

Podem obter-se expressões análogas às anteriores para as componentes de deslocamento vertical dos nós.

8.4.2 Funções de forma: Condições

De forma a garantir que as funções de forma $N_i^e(x, y)$ são funções de interpolação, estas devem verificar um determinado conjunto de condições matemáticas. A primeira destas condições é a seguinte:

Condição I

Os deslocamentos dos nós do próprio elemento finito também devem poder ser determinados recorrendo às funções de forma $N_i^e(x, y)$.

Por exemplo, para o nó i , o deslocamento será

$$\mathbf{u}_i = N_i^e(x, y)\mathbf{u}_i + N_j^e(x, y)\mathbf{u}_j + N_k^e(x, y)\mathbf{u}_k, \quad (8.38)$$

em que não se aplica a convenção de Einstein relativa à notação indicial. Ora, esta relação só é verdadeira qualquer que seja o deslocamento nodal se N_i for igual a 1 no nó i e igual a zero nos restantes nós. Adicionalmente, a condição anterior tem de ser verdadeira para todos os nós e as funções de forma do elemento, ou seja,

$$N_p(x_q, y_q) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow q = p \\ 0 & \Leftarrow q \neq p \end{cases}, \quad \forall p, q=1, \dots, n_{\text{nos}}, \quad (8.39)$$

em que n_{nos} é número total de nós do elemento e .

A segunda condição é a seguinte:

Condição II

Tem de existir continuidade do campo de deslocamentos na fronteira de cada um dos elementos com os elementos que lhe são adjacentes na malha de elementos finitos.

Na Figura 8.5, por exemplo, o deslocamento de um qualquer ponto pertencente à fronteira 1-2 depende unicamente da posição desse mesmo ponto e dos deslocamentos dos nós extremos dessa fronteira, isto é, dos nós 1 e 2. Por redução ao absurdo, se o deslocamento desse ponto também fosse função do do nó 3, então não haveria razão lógica para que não o fosse do deslocamento do nó 4, pertencente ao elemento f . Ora, como no caso geral $\mathbf{u}_3 \neq \mathbf{u}_4$, não estaria garantida a continuidade dos deslocamentos na fronteira 1-2. Para que assim seja, a função de forma N_3^e tem forçosamente de tomar o valor zero na fronteira 1-2 e, de modo idêntico, as funções de forma N_1 e N_2 têm de ser nulas nas fronteiras 2-3 e 1-3, respectivamente. Assim, a função de forma correspondente a um determinado nó assume o valor zero na (ou nas) fronteira(s) desse elemento que não incluam o nó a que diz respeito.

Com as considerações expressas pela equação 8.39 e pela Condição II é possível representar graficamente cada uma das funções de forma da relação 8.38. Tais representações são as que se mostram na Figura 8.6, onde se podem observar as funções de forma lineares N_i^e do elemento triangular de três nós, agora descritas.

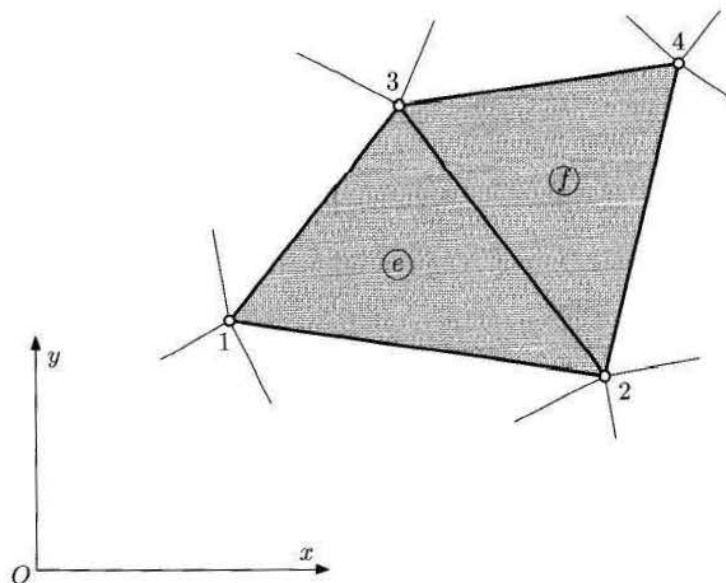


Figura 8.5 Representação dos elementos finitos triangulares adjacentes e e f .

A terceira condição matemática, que garante que as funções de forma são funções de interpolação, é a seguinte:

Condição III

As funções de forma têm de ser capazes de representar um movimento de translação sem deformação — movimento de corpo rígido —, isto é, um movimento em que

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3. \quad (8.40)$$

Com a verificação desta condição, todos os restantes pontos do elemento finito e , além dos próprios nós, têm um deslocamento igual ao dos nós, ou seja,

$$\mathbf{u}[P(x, y)] = \mathbf{u} \quad (8.41)$$

$$= \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3, \quad \forall P(x, y) \in e. \quad (8.42)$$

Porém,

$$\mathbf{u} = N_1^e(x, y)\mathbf{u}_1 + N_2^e(x, y)\mathbf{u}_2 + N_3^e(x, y)\mathbf{u}_3. \quad (8.43)$$

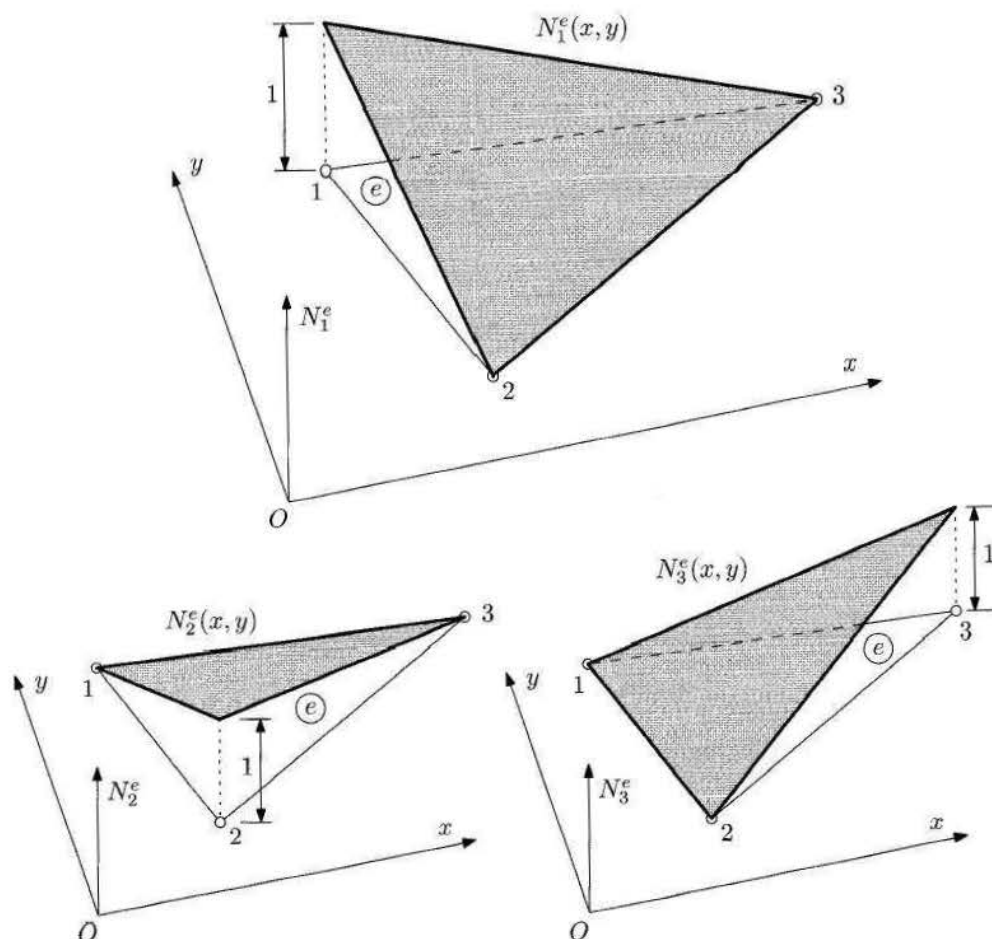


Figura 8.6 Representação gráfica das funções de forma lineares $N_1^e(x, y)$, $N_2^e(x, y)$ e $N_3^e(x, y)$ do elemento finito triangular de três nós genérico e .

Mas, uma vez que todos os nós têm deslocamento idêntico, então

$$\mathbf{u} = N_1^e(x, y)\mathbf{u} + N_2^e(x, y)\mathbf{u} + N_3^e(x, y)\mathbf{u} \quad (8.44)$$

$$= [N_1^e(x, y) + N_2^e(x, y) + N_3^e(x, y)] \mathbf{u}. \quad (8.45)$$

Dada a arbitrariedade de $\mathbf{u}$, a expressão anterior só é verdadeira se a soma das três funções de forma for igual à unidade, isto é, se

$$N_1^e(x, y) + N_2^e(x, y) + N_3^e(x, y) = 1, \quad (8.46)$$

em qualquer ponto do elemento finito.

Finalmente, a última condição necessária para que as funções de forma sejam funções de interpolação válidas é a seguinte:

Condição IV

As funções de forma $N_i^*(x, y)$ têm de ser capazes de representar um movimento de rotação sem deformação.

Na Figura 8.7 mostra-se a trajectória percorrida por um ponto material genérico P , de coordenadas (x, y) , quando sofre uma pequena rotação (infinitesimal) em torno da origem do sistema de eixos, deslocando-se uma distância $r\theta$. A componente de deslocamento do ponto P na direcção do eixo Ox , designada por u , é dada por

$$u = -r\theta \sin \phi. \quad (8.47)$$

Uma vez que

$$\sin \phi = \frac{y}{r}, \quad (8.48)$$

a equação 8.47 pode ser reescrita de forma mais simples como se segue:

$$u = -y\theta. \quad (8.49)$$

Procedendo de modo idêntico para todos os deslocamentos nodais do elemento e , obtém-se

$$\begin{cases} u_1 = -y_1\theta \\ u_2 = -y_2\theta \\ u_3 = -y_3\theta \end{cases} \quad (8.50)$$

Omitindo a designação do elemento e por simplicidade de escrita e substituindo as equações 8.49 e 8.50 na relação

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3, \quad (8.51)$$

obtém-se

$$-y\theta = -N_1y_1\theta - N_2y_2\theta - N_3y_3\theta, \quad (8.52)$$

ou seja,

$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3. \quad (8.53)$$

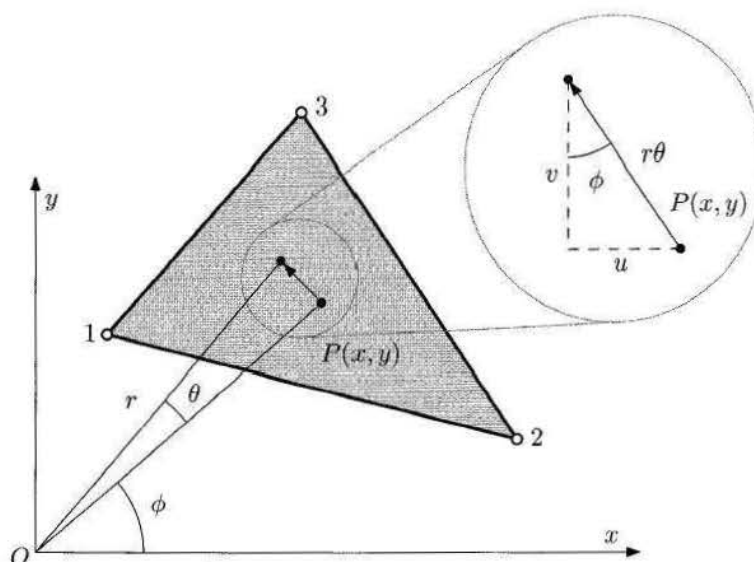


Figura 8.7 Trajectória percorrida por um ponto material genérico $P(x, y)$ quando sofre uma pequena rotação (infinitesimal) em torno da origem do sistema de eixos.

Procedendo de modo idêntico para a componente de deslocamento do ponto P na direcção Oy , designada por v , é possível determinar a coordenada x , de tal modo que

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3, \quad (8.54)$$

8.4.3 Campo de deformações e de tensões elementares

O campo de deslocamentos num qualquer ponto do elemento finito triangular de três nós pode ser determinado em termos das funções de forma $N_i^e(x, y)$ ($i = 1, \dots, 3$) e dos graus de liberdade nodais, isto é,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}, \quad (8.55)$$

em que, por uma questão de simplicidade de escrita, se omitiu o índice e na designação das funções de forma. Substituindo a equação anterior nas relações entre deslocamento e deformação dadas pela equação matricial 8.6, obtêm-se as componentes cartesianas do campo das deformações, na forma

$$\varepsilon(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}. \quad (8.56)$$

O campo de deformações do elemento triangular, na forma anterior, pode ser reescrito numa forma mais compacta como se segue:

$$\varepsilon(x, y) = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \mathbf{B}_3] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{Bmatrix} \quad (8.57)$$

ou, de forma ainda mais compacta, $\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{u}^e$, em que $\mathbf{B}_i$, com $i = 1, \dots, 3$, são as matrizes das derivadas das funções de forma associadas ao nó i , isto é,

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (8.58)$$

Para o caso do elemento finito triangular linear, recorrendo à relação 8.37, em que se expressam as funções de forma nodais em função dos coeficientes α , β e γ , pode obter-se uma expressão simplificada para a submatriz das derivadas das funções de forma genérica, $\mathbf{B}_i$, ou seja,

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 \\ 0 & \gamma_i \\ \gamma_i & \beta_i \end{bmatrix}. \quad (8.59)$$

Consequentemente, a matriz completa das derivadas das funções de forma para o elemento e é dada por

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_3 & \beta_3 \end{bmatrix}. \quad (8.60)$$

O campo das deformações, na forma dada pela relação 8.56, pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_3 & \beta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (8.61)$$

ou, de forma mais compacta, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}^e$. Como se pode verificar facilmente analisando a expressão anterior, o campo de deformações do elemento triangular de três nós é definido por termos constantes, que dependem unicamente das coordenadas dos nós do elemento (através das constantes β_i e γ_i) e dos deslocamentos nodais. Desta forma, cada elemento reproduz um estado de deformação constante e distinto do que se obtém nos elementos adjacentes. Essa aproximação constante do estado de deformação obtido para cada elemento faz com que, muitas vezes, seja necessário recorrer a discretizações com malhas de elementos finitos muito refinadas, nomeadamente em zonas da malha de elementos finitos onde se prevêem gradientes consideráveis de deformação e de tensão.

Como foi referido anteriormente (ver equação 8.9), assumindo que o material tem um comportamento linear elástico, o campo de tensão no elemento e pode ser relacionado com o campo de deformação no mesmo elemento através da lei de Hooke, isto é,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u}^e. \quad (8.62)$$

8.4.4 Coordenadas de área

A utilização do conceito de coordenadas de área constitui uma alternativa muito eficiente para a determinação de funções de forma para elementos triangulares de ordem elevada, por comparação com a utilização directa do polinómio de Lagrange. O conceito de coordenadas de área baseia-se no cálculo de três coordenadas alternativas designadas por L_i , cuja expressão geral é

$$L_i = \frac{A_i}{\sum_{j=1}^3 A_j}, \quad (8.63)$$

em que $i = 1, \dots, 3$. O termo A_i corresponde à área do triângulo formado pelos nós (j, k) e pelo ponto $P \equiv P(x, y)$ no interior ou na fronteira do elemento finito, conforme se mostra na Figura 8.8. A área total do elemento é

$$\sum_{j=1}^3 A_j = A^e, \quad (8.64)$$

que, para o caso apresentado na Figura 8.8, resulta em

$$A^e = \frac{bh}{2}.$$

Assim, a coordenada de área genérica L_i é

$$L_i = L_i(x, y) = \frac{A_i}{A^e} \left(= \frac{2A_i}{bh} \right). \quad (8.65)$$

A título de exemplo, a coordenada de área correspondente ao triângulo a sombreado na Figura 8.8 é

$$L_1 = \frac{A_1}{A^e} = \frac{2A_1}{bh} = \frac{2}{bh} \frac{bs}{2} = \frac{s}{h}.$$

A partir da definição de coordenada de área (equação 8.63), as coordenadas L_i ($i = 1, \dots, 3$) verificam a seguinte propriedade

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1. \quad (8.66)$$

Adicionalmente, as coordenadas de área podem ser utilizadas para definir a interpolação entre a posição de um qualquer ponto do elemento e a posição dos

nós do elemento, ambas em coordenadas cartesianas, na forma

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} L_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} L_i y_i \end{cases}, \quad (8.67)$$

sendo ainda possível representar as coordenadas de área para o caso particular do elemento triangular de três nós através da relação

$$L_i = \frac{1}{2A^e} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y), \quad (8.68)$$

análoga à expressão 8.37, utilizada para determinar as funções de forma $N_i^e(x, y)$ do elemento triangular de três nós em função dos parâmetros α_i , β_i e γ_i .

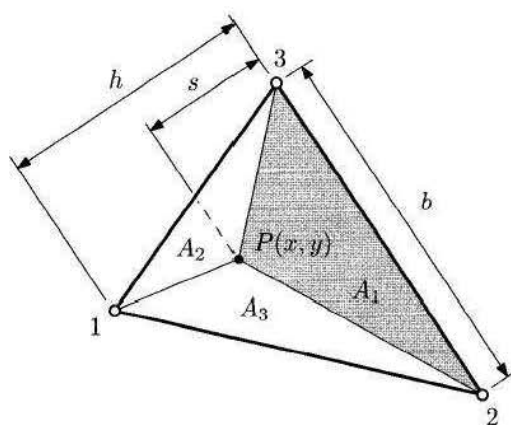


Figura 8.8 Coordenadas de área para um elemento triangular de três nós genérico.

8.4.5 Elementos triangulares de ordem superior

Considere-se agora o caso de elementos triangulares com ordem superior à descrita nas secções anteriores, ou seja, com k ($k \geq 3$) nós igualmente espaçados em cada aresta do elemento, tal como se mostra nas Figuras 8.9(b) e 8.10 (para elementos quadráticos e cúbicos, respectivamente).

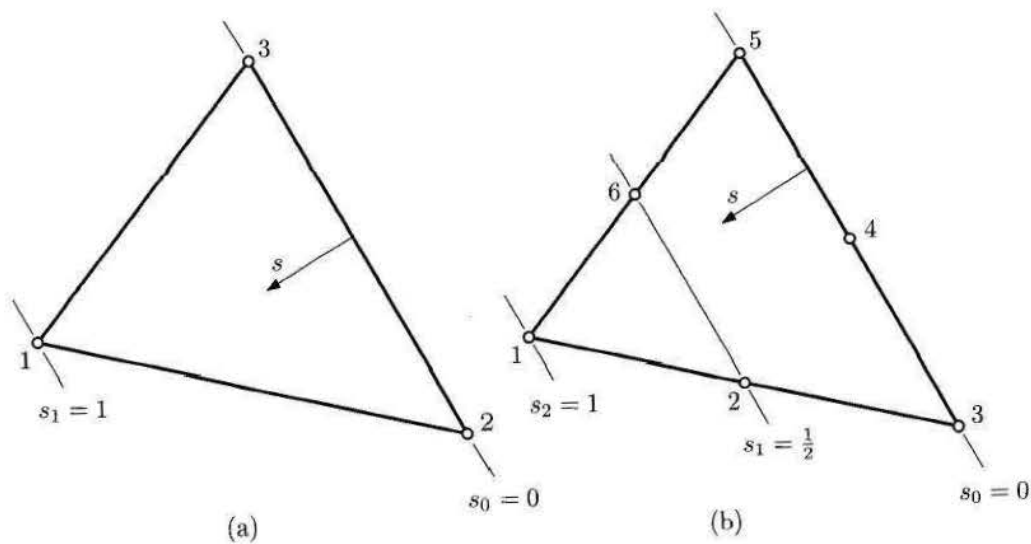


Figura 8.9 Referenciais para determinação das coordenadas de área para um elemento triangular genérico (a) linear e (b) quadrático.

O número total de nós no elemento, incluindo os nós internos, pode ser obtido através da expressão

$$n_{\text{nos}} = \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) = k + (k-1) + \dots + 1 = \sum_{i=1}^k i, \quad (8.69)$$

sendo o grau de interpolação de ordem $(k-1)$. A título de exemplo, para o elemento quadrático da Figura 8.9(b), tem-se que $k-1=2$ e

$$n_{\text{nos}} = \sum_{i=0}^2 (k-i) = (k-0) + (k-1) + (k-2) = 3 + 2 + 1 = 6.$$

No que diz respeito aos elementos triangulares, representados nas Figuras 8.9 e 8.10, é útil recorrer à distância s_p , medida desde uma determinada aresta de referência do elemento até à p -ésima linha que serve de suporte aos demais nós do elemento. Essas linhas podem ser construídas para cada aresta do elemento triangular. Porém, para obter as funções de forma do elemento será apenas analisada a configuração na qual a origem da coordenada s_p reside na aresta oposta ao nó de referência I de cada elemento. Para os casos representados nas Figuras 8.9 e 8.10 o nó de referência corresponde ao nó 1 de cada elemento ($I=1$). O valor dessa coordenada interna aos elementos pode ser então definido

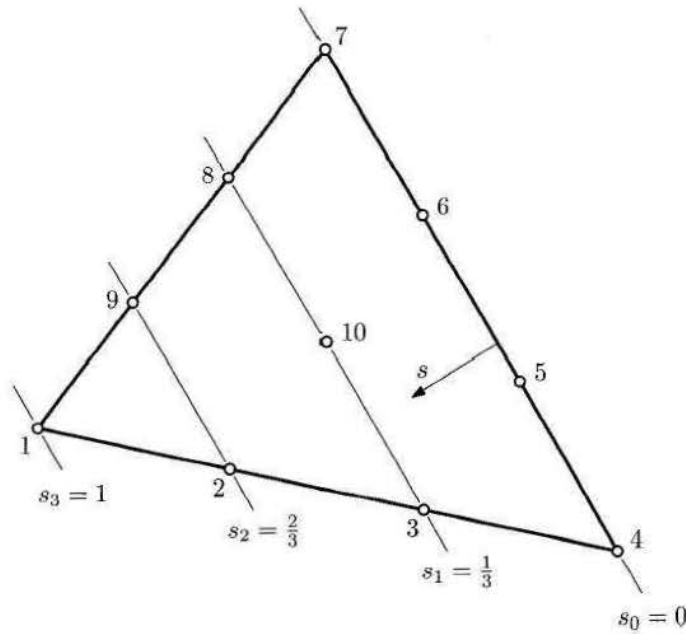


Figura 8.10 Referenciais para determinação das coordenadas de área para um elemento triangular genérico cúbico.

na forma

$$\begin{cases} s_p = \frac{p}{k-1}, & \text{com } p = 0, 1, \dots, (k-2) \\ s_I = s_{k-1} = 1 \end{cases} \quad (8.70)$$

De uma forma geral, a partir das condições inerentes às funções de forma definidas na Secção 8.4.2, deve garantir-se que $N_I = 0$ em todos os nós posicionados sobre as linhas definidas pelas coordenadas de área

$$L_I = \frac{p}{k-1}, \quad (8.71)$$

em que $p = 0, 1, \dots, (k-2)$. Adicionalmente, deve ainda garantir-se que $N_I = 1$ para o nó I , ou seja, sobre a linha definida por $L_I = s_I$. Assim, a expressão geral que permite obter as funções de forma através de um polinómio de Lagrange para os nós localizados nos vértices dos elementos é

$$N_I = \frac{(L_I - s_0)(L_I - s_1)(L_I - s_2) \dots (L_I - s_{k-2})}{(s_I - s_0)(s_I - s_1)(s_I - s_2) \dots (s_I - s_{k-2})} \quad (8.72)$$

ou, de forma mais compacta,

$$N_I = \prod_{p=0}^{k-2} \frac{(L_I - s_p)}{(s_{k-1} - s_p)}. \quad (8.73)$$

Para os nós do elemento que estejam localizados noutras posições que não os vértices do elemento finito, é necessário recorrer a procedimentos alternativos. Estes procedimentos são explicados através dos exercícios resolvidos que se seguem.

Exercício 8.1. Definir, em termos das coordenadas de área, as funções de forma para um elemento triangular linear, isto é, de três nós.

Resolução

O elemento finito tem dois nós por aresta e, dessa forma, $k = 2$, sendo o número total de nós $n_{\text{nos}} = 3$. Para o nó 1, representado na Figura 8.9(a), a aplicação das equações 8.70 e 8.73 conduzem a

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_1 = 1 \end{cases}$$

e

$$N_1 = \frac{L_1 - s_0}{s_1 - s_0} = L_1,$$

respectivamente. De forma idêntica, para os nós 2 e 3 chega-se, respectivamente, a

$$\begin{cases} N_2 = L_2 \\ N_3 = L_3 \end{cases},$$

conforme já se havia mostrado na definição do próprio conceito de coordenadas de área.

Exercício 8.2. Definir as funções de forma do elemento triangular quadrático, ou seja, com seis nós, em função das coordenadas de área.

Resolução

O elemento finito triangular quadrático de seis nós ($n_{\text{nós}} = 6$) tem três nós em cada aresta. Estes nós estão igualmente espaçados ($k = 3$), conforme se mostra na Figura 8.9(b). Para o nó 1, localizado num dos vértices do elemento, obtém-se

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_1 = \frac{1}{2} \\ s_2 = 1 \end{cases}$$

A aplicação directa da equação 8.72 ou da relação 8.73 conduz ao seguinte resultado:

$$N_1 = \frac{(L_1 - s_0)(L_1 - s_1)}{(s_2 - s_0)(s_2 - s_1)} = L_1(2L_1 - 1).$$

No que diz respeito à obtenção da função de forma do nó 2 ($s = \frac{1}{2}$) da Figura 8.9(b), deve recordar-se que essa função deve assumir o valor zero nos nós 1, 3, 4, 5 e 6, e o valor 1 no próprio nó. A mesma função deve também anular-se em todos os pontos sobre a aresta que une os nós 1 e 5, e os nós 3 e 5. Estas arestas são caracterizadas por coordenadas de área $L_2 = 0$ e $L_1 = 0$, respectivamente. Os índices das coordenadas de área dizem respeito aos nós do elemento triangular de três nós representado na Figura 8.9(a). Essas coordenadas de área foram já calculadas na expressão 8.68. A imposição simultânea destas igualdades para o nó 2, localizado ao longo da coordenada interna $s_1 = \frac{1}{2}$, conduz à seguinte expressão:

$$N_2 = \frac{(L_2 - 0)(L_1 - 0)}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 0)} = 4L_1L_2.$$

O mesmo raciocínio, aplicado aos restantes nós nas arestas e vértices do elemento, conduz às seguintes expressões para as funções de forma restantes

$$\begin{cases} N_3 = L_2(2L_2 - 1) \\ N_4 = 4L_2L_3 \\ N_5 = L_3(2L_3 - 1) \\ N_6 = 4L_1L_3 \end{cases}$$

As expressões anteriores dependem funcionalmente dos valores das coordenadas de área definidas originalmente para o elemento triangular linear de três nós através da expressão 8.68, conforme mencionado anteriormente.

A título ilustrativo, na Figura 8.11 estão representadas as funções de forma para o caso de um nó num vértice e a meio de uma aresta do elemento triangular quadrático.

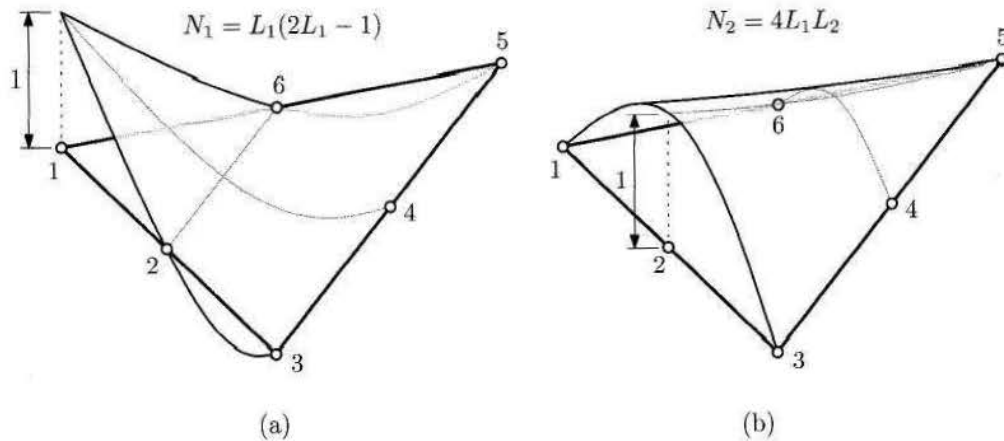


Figura 8.11 Representação das funções de forma (a) de um nó no vértice e (b) de um nó a meio de uma aresta, para um elemento triangular quadrático.

Exercício 8.3. Definir, em termos das coordenadas de área, as funções de forma para o elemento triangular cúbico de dez nós (ver Figura 8.10).

Resolução

O elemento finito triangular de dez nós ($n_{\text{nos}} = 10$) possui quatro nós igualmente espaçados ao longo de cada aresta, conforme se mostra na Figura 8.10. Consequentemente, $k - 1 = 3$. A função de forma do nó 1, posicionado num dos vértices do elemento, deve assumir o valor zero nos nós posicionados sobre as linhas com coordenadas $s_0 = 0$, $s_1 = \frac{1}{3}$ e $s_2 = \frac{2}{3}$. Aplicando directamente a relação 8.72 (ou 8.73) obtém-se

$$N_1 = \frac{(L_1 - 0)}{(1 - 0)} \frac{(L_1 - \frac{1}{3})}{(1 - \frac{1}{3})} \frac{(L_1 - \frac{2}{3})}{(1 - \frac{2}{3})}$$

e, conseqüentemente, para o mesmo nó 1,

$$N_1 = \frac{L_1}{2} (3L_1 - 1) (3L_1 - 2).$$

Para o cálculo da função de forma do nó 2, situado sobre uma aresta do elemento representado na Figura 8.10, importa verificar, em primeiro lugar, que essa função deve assumir o valor 1 nesse próprio nó e ser nula nas arestas que unem os nós 1 a 7 e 4 a 7. Estas arestas são caracterizadas por funções $L_2 = 0$ e $L_1 = 0$, respectivamente, em que, mais uma vez, os índices dizem respeito à numeração utilizada no elemento triangular linear de três nós da Figura 8.9(a). De igual modo, a função de forma N_2 tem de ser nula nos nós localizados ao longo da linha com coordenadas $s_1 = \frac{1}{3}$, onde se inclui o nó interno do elemento. Tendo em consideração as restrições referidas, uma possível função de forma para o nó 2 do elemento triangular cúbico pode ser

$$N_2 = \frac{(L_2 - 0)(L_1 - 0)(L_1 - \frac{1}{3})}{(\frac{1}{3} - 0)(\frac{2}{3} - 0)(\frac{2}{3} - \frac{1}{3})} = \frac{9}{2} L_2 L_1 (3L_1 - 1).$$

As restantes funções de forma podem determinar-se de forma semelhante, obtendo-se as seguintes expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_3 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_2 - 1) \\ N_4 = \frac{1}{2} L_2 (3L_2 - 1) (3L_2 - 2) \\ N_5 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_2 - 1) \\ N_6 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_3 - 1) \\ N_7 = \frac{1}{2} L_3 (3L_3 - 1) (3L_3 - 2) \\ N_8 = \frac{9}{2} L_1 L_3 (3L_3 - 1) \\ N_9 = \frac{9}{2} L_1 L_3 (3L_1 - 1) \\ N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3 \end{array} \right. ,$$

em função das coordenadas de área definidas originalmente para o elemento triangular linear de três nós na expressão 8.68.

8.4.6 Elementos finitos rectangulares

Antes de prosseguir com a análise genérica dos elementos bidimensionais isoparamétricos, interessa analisar com algum detalhe a formulação do elemento finito rectangular, em particular do elemento bilinear de quatro nós. Sem perda de generalidade, o polinómio interpolador do campo de deslocamentos de um elemento rectangular de ordem superior, isto é, com maior número de nós, pode ser obtido através da aplicação do triângulo de Pascal, representado na Figura 8.12.

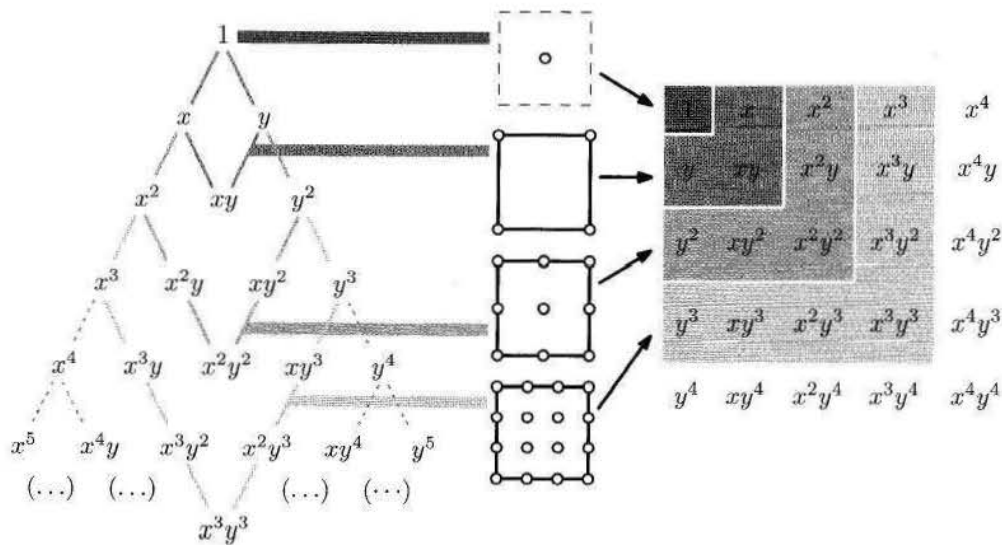


Figura 8.12 Triângulo de Pascal contendo os termos polinomiais para elementos rectangulares de várias ordens.

De uma forma geral, um elemento finito rectangular lagrangiano de ordem $p \geq 1$ é constituído por um número de nós dado por

$$n_{\text{nos}} = (p + 1)^2. \quad (8.74)$$

Para um elemento rectangular de primeira ordem, por exemplo, obtém-se $n_{\text{nos}} = 4$, ou seja, um total de quatro nós por elemento, situados nos seus vértices. Por outro lado, para um elemento quadrático, isto é, de segunda ordem, obtém-se $n_{\text{nos}} = 9$, ou seja, este elemento finito possui um total de nove nós. Neste caso, quatro nós situam-se nos vértices, outros quatro a meio de cada aresta e um nó interno no centro do elemento finito. Este raciocínio pode ser aplicado na

construção de elementos finitos de ordem mais elevada, conforme se mostra na Figura 8.12.

O polinómio que descreve a aproximação elementar para uma determinada componente do campo de deslocamentos é definido por um número de parcelas igual ao número de nós do elemento. Estas parcelas podem obter-se, nas coordenadas (x, y) , a partir do triângulo de Pascal representado na Figura 8.12. Por exemplo, o polinómio de aproximação do deslocamento horizontal para o elemento rectangular bilinear de quatro nós, em termos das coordenadas genéricas do ponto em análise, é

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy, \quad (8.75)$$

que corresponde aos primeiros quatro termos (directos e cruzados) do triângulo de Pascal. De forma análoga, para o elemento quadrático de nove nós, o polinómio de interpolação é de segunda ordem, tendo nove parcelas e a seguinte forma genérica:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 \quad (8.76)$$

$$+ \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^2 y^2. \quad (8.77)$$

Para determinar os polinómios de interpolação de elementos finitos rectangulares de ordem mais elevada procede-se de forma análoga. O caso particular do elemento de grau zero, isto é, com $p = 0$, representado na Figura 8.12, corresponde a um “elemento finito” que degenera num único nó, ou seja, o valor das componentes de deslocamento é constante para esse elemento finito degenerado.

Após a introdução genérica dos parágrafos anteriores relativa aos polinómios de interpolação para elementos finitos rectangulares de qualquer ordem, interessa focar a análise no elemento mais simples desta classe, isto é, no elemento rectangular de quatro nós, cujo polinómio de aproximação foi definido na relação 8.75. Este é um elemento finito bilinear, uma vez que o polinómio que o define tem parcelas lineares em x , em y e em xy . O elemento encontra-se representado na Figura 8.13, para um conjunto de dimensões e coordenadas nodais globais genéricas.

Para determinar as funções de forma bidimensionais, em termos das coordenadas globais dos nós do elemento, utilizam-se as funções de forma unidimensionais ao longo das direcções Ox e Oy , multiplicando-as uma pela outra para obter uma função de forma combinada para o nó em questão.

Por exemplo, para o nó 1 do elemento genérico representado na Figura 8.13, a função de forma $N_1^e(x, y)$ é o resultado do produto das funções de forma uni-

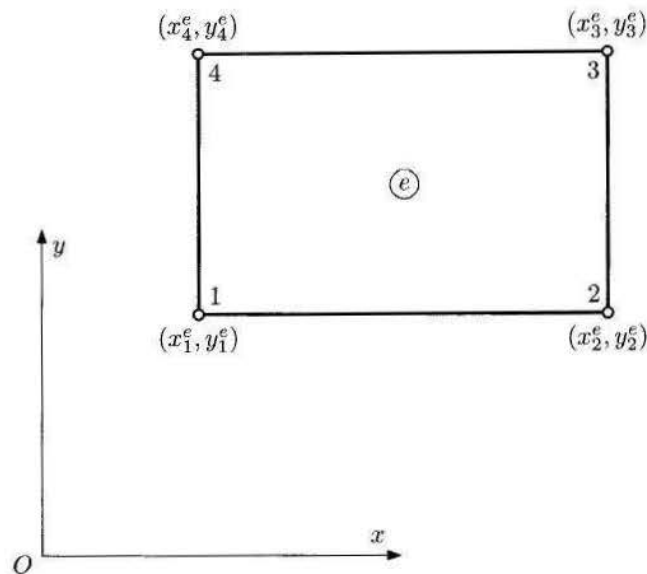


Figura 8.13 Representação esquemática de um elemento finito rectangular de quatro nós genérico e .

dimensionais $N_1^e(x)$ e $N_1^e(y)$. Estas últimas funções de forma são definidas para um elemento do tipo barra com, neste caso, os nós 1 e 2 orientados segundo as direcções globais Ox , e os nós 1 e 4 orientados segundo a direcção Oy , respectivamente. Desta forma, garante-se que a função de forma composta respeita a condição $N_1^e(x, y) = 1$ no próprio nó e a condição $N_1^e(x, y) = 0$ nos restantes nós do elemento finito.

De forma idêntica, a função de forma $N_2^e(x, y)$ do nó 2 do elemento genérico da Figura 8.13 pode também obter-se através do produto da função de forma do nó 2 do elemento unidimensional ao longo de Ox — $N_2^e(x)$ — pela função de forma do nó 1 do elemento unidimensional de barra ao longo de Oy — $N_1^e(y)$. Uma vez que ambas as funções de forma unidimensionais possuem valores unitários no nó respectivo e são nulas nos restantes nós, a função de forma composta $N_2^e(x, y)$ no plano Oxy garante um valor unitário no seu nó de referência e nulo nos restantes.

Na Figura 8.14 mostra-se uma representação esquemática das funções de forma unidimensionais dos elementos fictícios do tipo barra ao longo das direcções Ox e Oy .

De forma resumida, as funções de forma de cada um dos nós do elemento rectangular da Figura 8.14 podem ser obtidas através das expressões

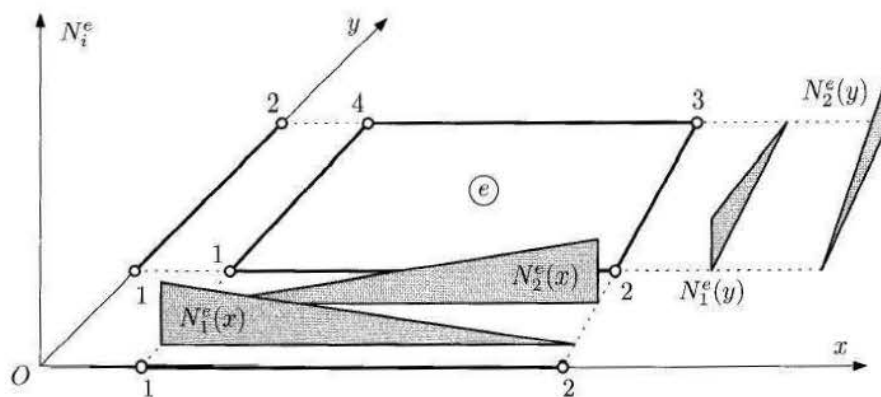


Figura 8.14 Representação esquemática das funções de forma unidimensionais ao longo dos eixos Ox e Oy usadas na construção das funções de forma bidimensionais para o elemento finito rectangular de quatro nós genérico e .

$$\begin{cases} N_1^e(x, y) = N_1^e(x) N_1^e(y) \\ N_2^e(x, y) = N_2^e(x) N_1^e(y) \\ N_3^e(x, y) = N_2^e(x) N_2^e(y) \\ N_4^e(x, y) = N_1^e(x) N_2^e(y) \end{cases}, \quad (8.78)$$

em termos das funções de forma lineares unidimensionais representadas na mesma figura. Introduzindo as coordenadas nodais do elemento representado, obtém-se

$$\begin{cases} N_1^e(x, y) = \frac{(x - x_2)(y - y_4)}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_4)} = \frac{1}{A^e} (x - x_2)(y - y_4) \\ N_2^e(x, y) = \frac{(x - x_1)(y - y_4)}{(x_2 - x_1)(y_1 - y_4)} = -\frac{1}{A^e} (x - x_1)(y - y_4) \\ N_3^e(x, y) = \frac{(x - x_1)(y - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_4 - y_1)} = \frac{1}{A^e} (x - x_1)(y - y_1) \\ N_4^e(x, y) = \frac{(x - x_2)(y - y_1)}{(x_1 - x_2)(y_4 - y_1)} = -\frac{1}{A^e} (x - x_2)(y - y_1) \end{cases}, \quad (8.79)$$

em que, mais uma vez, A^e é a área do elemento finito. As funções de forma assim definidas para o elemento rectangular são as representadas na Figura 8.15.

Apesar de serem extremamente simples, as funções de forma anteriores são válidas apenas para o caso particular de elementos quadriláteros rectangulares, não podendo ser utilizadas directamente para representar elementos distorcidos, ou com arestas e nós posicionados de uma forma geral no plano Oxy . Para esse

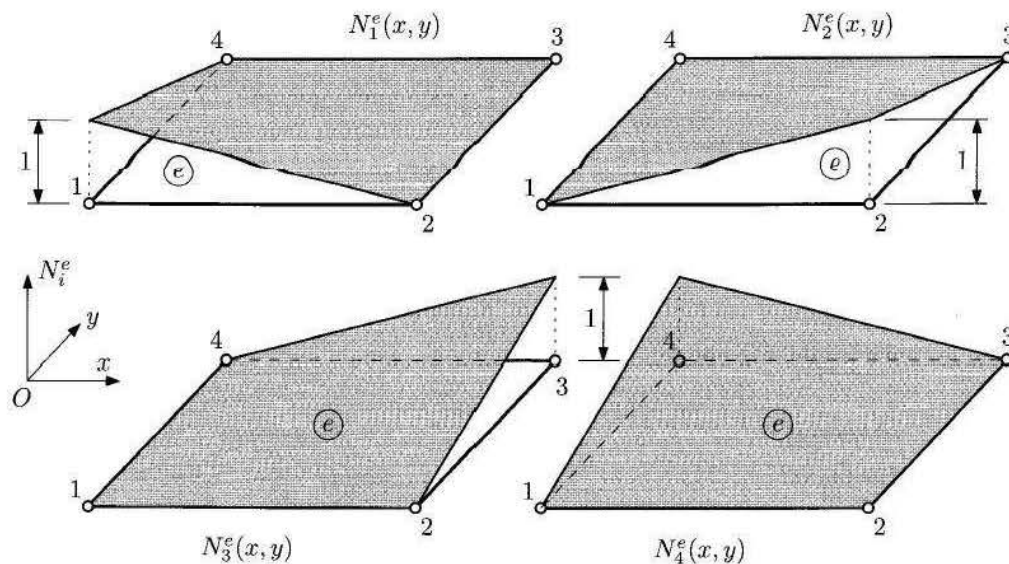


Figura 8.15 Representação das funções de forma bidimensionais para o elemento rectangular de quatro nós genérico e .

fim, é necessário recorrer ao conceito de formulação isoparamétrica, que será descrito detalhadamente na secção seguinte.

8.5 Elementos isoparamétricos quadriláteros bidimensionais

O conceito de interpolação isoparamétrica estabelece que as funções interpoladoras utilizadas na descrição da geometria do elemento são as mesmas adoptadas para aproximação dos seus graus de liberdade. Esta abordagem permite obter de forma sistemática formulações de ordem mais elevada que a da interpolação bilinear descrita na secção anterior e conduz a elementos finitos de lados curvos, muito úteis na modelação e na discretização de domínios com geometrias complexas.

Extrapolando os conceitos apresentados no Capítulo 7 relativos ao caso de elementos unidimensionais, a interpolação isoparamétrica em duas dimensões e em termos das coordenadas naturais do elemento, na altura designadas por coordenadas normalizadas, baseia-se na seguinte aproximação para a geometria do elemento finito:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} N_i(\xi, \eta) x_i \\ y = \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} N_i(\xi, \eta) y_i \end{cases}, \quad (8.80)$$

em que n_{nos} é o número de nós do elemento finito. Relativamente ao sistema de eixos de referência $O\xi\eta$, as coordenadas de qualquer ponto do elemento são definidas em $[-1, +1] \times [-1, +1]$, independentemente do grau de distorção do mesmo e dos seus lados serem ou não curvos.

Por outro lado, sendo o elemento isoparamétrico bidimensional descrito pelos graus de liberdade de translação u e v no sistema de eixos global Oxy , as componentes de deslocamento podem ser determinadas a partir da interpolação dos deslocamentos nodais como se segue:

$$\begin{cases} u(x, y) = \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} N_i(\xi, \eta) u_i \\ v(x, y) = \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} N_i(\xi, \eta) v_i \end{cases}. \quad (8.81)$$

Nas Figuras 8.16(a) e (b) estão representadas as configurações reais de dois elementos quadriláteros, um linear e um quadrático, e as correspondentes configurações normalizadas no referencial natural ortogonal $O\xi\eta$. Refira-se que, em seguida, se omite no presente capítulo a indicação da origem dos referenciais naturais $O\xi\eta$ por uma questão de clareza de ilustração.

8.5.1 Funções de forma para elementos lagrangianos

As funções de forma para os elementos quadriláteros lagrangianos baseiam-se nos correspondentes polinómios de Lagrange definidos no sistema de coordenadas naturais $O\xi\eta$ que, por sua vez, são obtidos directamente a partir da combinação dos polinómios de Lagrange em uma dimensão, descritos no Capítulo 7. Este procedimento de combinação de funções unidimensionais para a obtenção de funções de forma em duas dimensões já foi utilizado nas equações 8.78 para a interpolação em termos das coordenadas globais Oxy .

Recapitulando alguns conceitos apresentados em secções anteriores, os polinómios de Lagrange unidimensionais, em termos da coordenada natural ξ , podem ser determinados através da seguinte equação genérica:

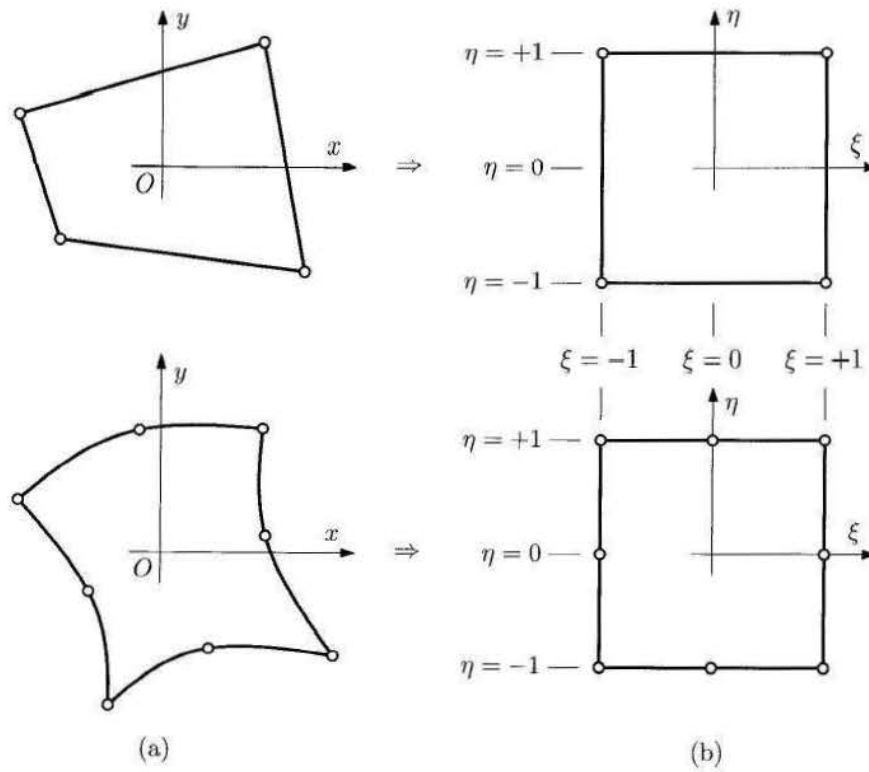


Figura 8.16 Configurações (a) reais e (b) normalizadas de dois elementos quadriláteros, um linear e um quadrático, com geometrias reais distorcidas.

$$N_i(\xi) = \prod_{j=1(j \neq i)}^{n_{\text{nos}}} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)}, \quad (8.82)$$

em que, por definição, $\xi \in [-1, +1]$. De modo análogo, os polinômios de Lagrange, em termos da coordenada natural η , podem ser obtidos na forma genérica

$$N_i(\eta) = \prod_{j=1(j \neq i)}^{n_{\text{nos}}} \frac{(\eta - \eta_j)}{(\eta_i - \eta_j)}, \quad (8.83)$$

com $\eta \in [-1, +1]$.

Para um elemento quadrilátero lagrangiano isoparamétrico de quatro nós, tal como o representado na Figura 8.17, a determinação das funções de forma bidimensionais no plano $O\xi\eta$ faz-se multiplicando as funções de forma

$$\begin{cases} N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{cases} \quad (8.84)$$

e

$$\begin{cases} N_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta) \\ N_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta) \end{cases} \quad (8.85)$$

Obtêm-se assim as funções de forma bidimensionais para cada um dos nós do elemento finito, isto é,

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{cases} \quad (8.86)$$

Tal como já acontecia com as funções de forma unidimensionais, cada uma das funções de forma agora definidas no plano $O\xi\eta$ respeita a condição essencial de assumir o valor unitário no nó a que diz respeito e ser nula nos restantes nós do elemento, com uma evolução bilinear entre os nós do elemento. As funções de forma 8.86 podem ser representadas numa única equação recorrendo à relação genérica

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi\xi_i) (1 + \eta\eta_i), \quad (8.87)$$

em que se introduzem os parâmetros ξ_i e η_i , que representam as coordenadas do nó i no referencial natural. Na Figura 8.18 está representada a evolução da função de forma para o nó 1 do elemento finito mostrado na Figura 8.17, bem como os valores das coordenadas ξ_i e η_i para todos os nós do elemento bilinear em análise.

Para o elemento finito lagrangiano quadrático de nove nós, as funções de forma podem ser obtidas recorrendo à mesma abordagem, ou seja, através do polinómio de Lagrange para elementos do tipo barra unidimensional (equações 8.82 e 8.83) com três nós, isto é, com $n_{\text{nos}} = 3$. Na Figura 8.19 pode ver-se uma representação destas funções de forma ao longo da direcção $O\xi$.

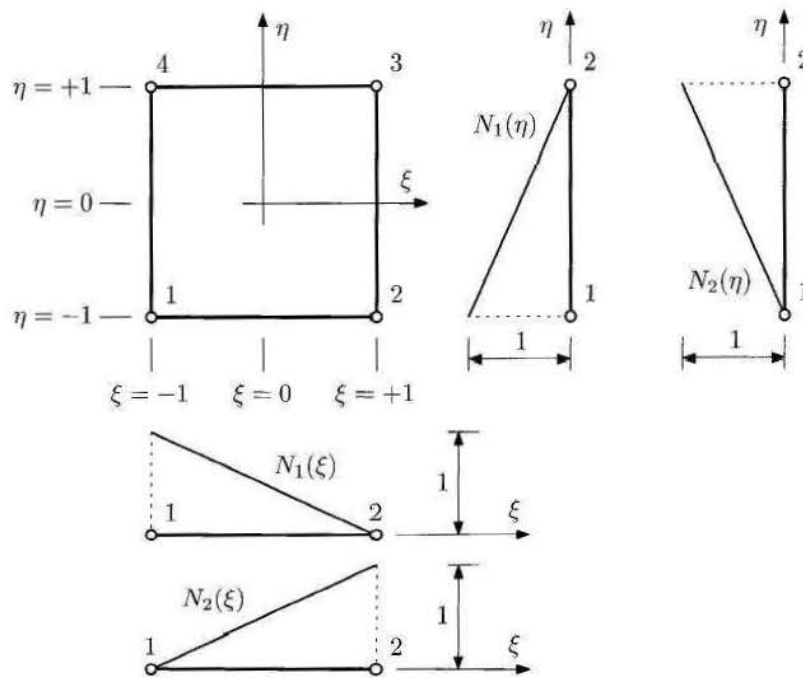


Figura 8.17 Representação esquemática de um elemento finito lagrangiano de quatro nós e das funções de forma unidimensionais nas direcções $O\xi$ e $O\eta$.

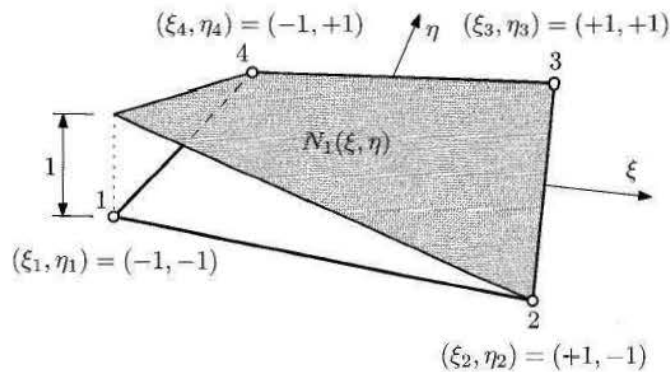


Figura 8.18 Elemento quadrilátero lagrangiano bilinear de quatro nós e função de forma para o nó 1.

Levando em conta as posições dos nós ao longo, por exemplo, da direcção $O\xi$, as expressões das funções de forma $N_1(\xi)$, $N_2(\xi)$ e $N_3(\xi)$ podem determinar-se recorrendo à expressão 8.82, obtendo-se

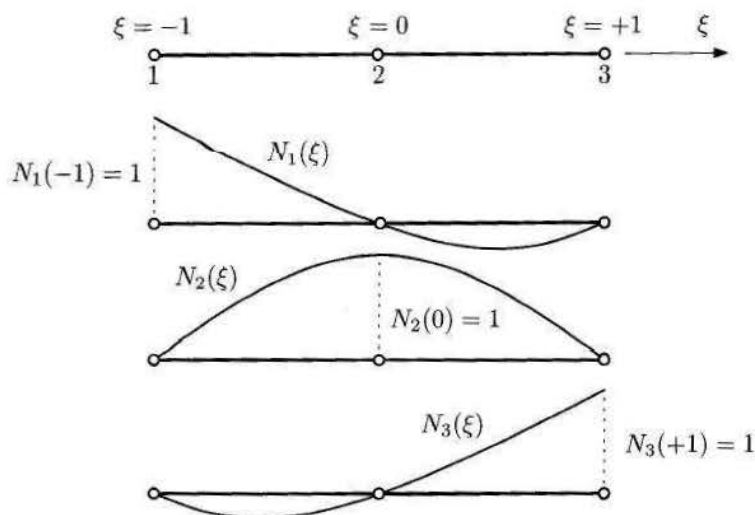


Figura 8.19 Elemento unidimensional quadrático lagrangiano (de três nós) e respectivas funções de forma.

$$\begin{cases} N_1 = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\ N_2 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = (1 + \xi)(1 - \xi) \\ N_3 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \end{cases} \quad (8.88)$$

Expressões análogas podem facilmente ser obtidas para as funções de forma $N_1(\eta)$, $N_2(\eta)$ e $N_3(\eta)$.

Seguindo o procedimento já utilizado para o elemento bilinear de quatro nós, a composição dos pares de funções de forma lagrangianas, ao longo das direcções $O\xi$ e $O\eta$, para cada um dos nove nós do elemento quadrático conduz às seguintes funções de forma bidimensionais:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta) \\ N_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta) \\ N_4 = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2) \\ N_5 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} N_6 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta) \\ N_7 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta) \\ N_8 = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2) \\ N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \end{cases} \quad (8.89)$$

relativas à numeração dos nós ordenados como se mostra na Figura 8.20 na sua geometria normalizada.

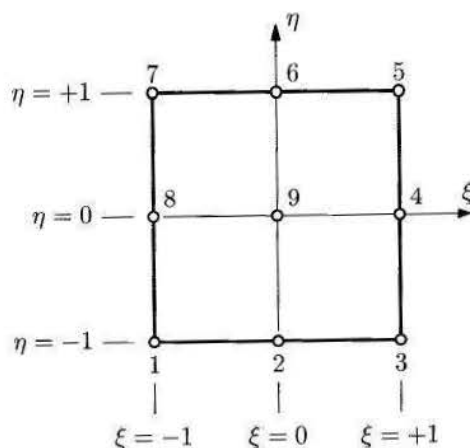


Figura 8.20 Elemento rectangular quadrático lagrangiano (de nove nós) e numeração dos nós no sistema natural $O\xi\eta$.

As funções de forma 8.89 podem ser apresentadas de uma forma mais genérica para os nós nos vértices do elemento — os nós 1, 3, 5 e 7 da Figura 8.20 —, isto é,

$$N_i = \frac{1}{4} (\xi^2 + \xi\xi_i) (\eta^2 + \eta\eta_i). \quad (8.90)$$

Para os nós situados a meio das arestas do elemento finito — os nós 2, 4, 6 e 8 da Figura 8.20 —, a expressão geral é

$$N_i = \frac{1}{2} \eta_i^2 (\eta^2 + \eta\eta_i) (1 - \xi^2) + \frac{1}{2} \xi_i^2 (\xi^2 + \xi\xi_i) (1 - \eta^2), \quad (8.91)$$

enquanto que ao nó central do elemento — o nó 9 — corresponde uma função de forma do tipo “bolha”, matematicamente expressa por

$$N_9 = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2). \quad (8.92)$$

Nas equações anteriores fez-se novamente uso do par de coordenadas ξ_i e η_i , cujos valores coincidem com as coordenadas do nó i no sistema natural $O\xi\eta$. A evolução quadrática das funções de forma para três nós representativos do elemento lagrangiano de nove nós está representada nas Figuras 8.21 e 8.22.

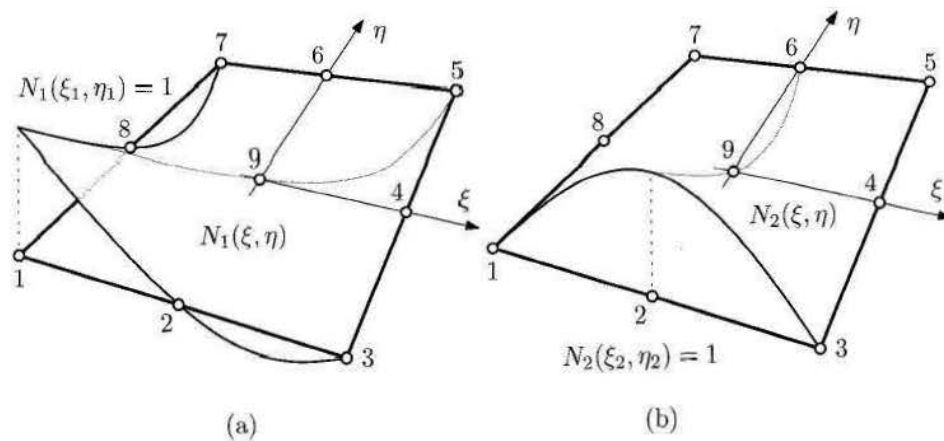


Figura 8.21 Representação gráfica de funções de forma do elemento rectangular quadrático lagrangiano (de nove nós). Função de forma (a) do nó 1, num vértice do elemento, e (b) do nó 2, a meio de uma aresta do elemento.

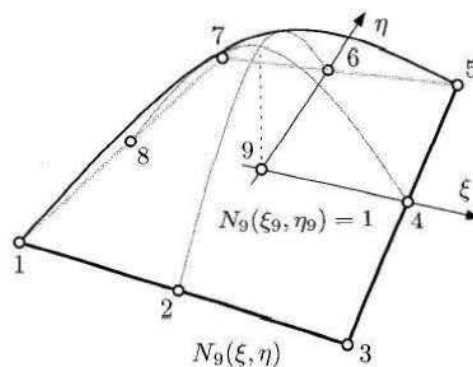


Figura 8.22 Representação gráfica da função de forma do nó 9, no centro do elemento rectangular quadrático lagrangiano de nove nós.

Exercício 8.4. Recorrendo aos polinómios de Lagrange em uma dimensão, deduza expressões para as funções de forma de um elemento finito quadrilátero cúbico, ou seja, com 16 nós.

Resolução

No seguimento do que foi visto para os elementos quadriláteros lineares (de quatro nós) e quadráticos (de nove nós), um elemento finito lagrangiano cúbico possui os seus nós igualmente distribuídos num arranjo 4×4 , conforme se mostra

na Figura 8.23 para a sua geometria normalizada no sistema de coordenadas naturais $O\xi\eta$.

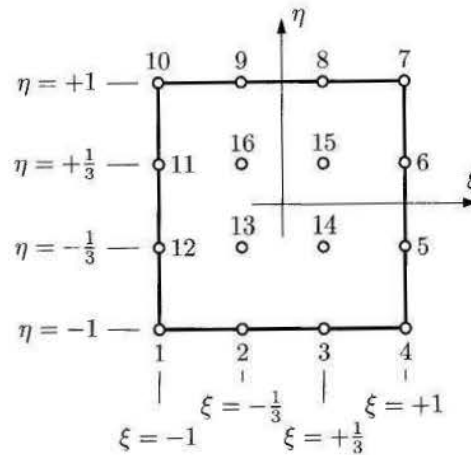


Figura 8.23 Elemento rectangular cúbico lagrangiano (de 16 nós) e numeração dos nós no sistema natural $O\xi\eta$.

O primeiro passo na definição das funções de forma para cada um dos nós do elemento finito é a definição dos polinómios de Lagrange que caracterizam um elemento unidimensional com quatro nós igualmente espaçados. Considere-se, por exemplo, o elemento do tipo barra representado na Figura 8.24, orientado segundo o eixo natural $O\xi$.

Os nós encontram-se igualmente espaçados ao longo do intervalo $[-1, +1]$, correspondente à dimensão normalizada do elemento. Consequentemente, as coordenadas dos nós do elemento unidimensional cúbico lagrangiano de quatro nós são $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = -\frac{1}{3}$, $\xi_3 = +\frac{1}{3}$ e $\xi_4 = +1$. Aplicando a expressão geral do polinómio de Lagrange (ver equação 8.82), obtém-se

$$\begin{cases} N_1 = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_4)} = \frac{1}{16}(\xi - 1)(1 - 9\xi^2) \\ N_2 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_4)} = \frac{27}{16}\left(\xi - \frac{1}{3}\right)(\xi^2 - 1) \\ N_3 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_4)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_4)} = -\frac{27}{16}\left(\xi + \frac{1}{3}\right)(\xi^2 - 1) \\ N_4 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_4 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_2)(\xi_4 - \xi_3)} = \frac{1}{16}(\xi + 1)(9\xi^2 - 1) \end{cases}$$

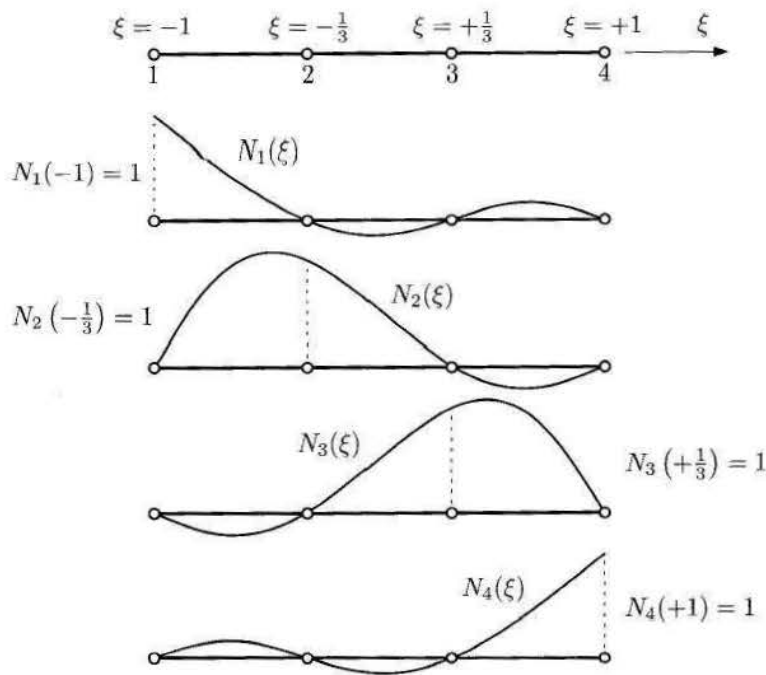


Figura 8.24 Elemento unidimensional cúbico lagrangiano (de quatro nós) e respectivas funções de forma.

Estas funções estão representadas individualmente e de forma esquemática na Figura 8.24. A título de exemplo, para o nó 1 de coordenadas $\xi_1 = -1$ e $\eta_1 = -1$ (ver numeração dos nós na Figura 8.23) combinam-se as funções de forma unidimensionais em ξ e η que convergem no nó em causa, conforme se mostra na Figura 8.25. Assim, obtém-se

$$N_1(\xi, \eta) = N_1(\xi) N_1(\eta) = \frac{1}{256} (\xi - 1) (\eta - 1) (1 - 9\xi^2) (1 - 9\eta^2).$$

A função de forma $N_1(\xi, \eta)$ está representada na Figura 8.26.

O mesmo procedimento pode ser aplicado aos nós nas arestas ou aos nós internos do elemento finito. Neste último caso, tomando como exemplo o nó 16 do elemento finito da Figura 8.23, o procedimento para a obtenção da função de forma

$$N_{16}(\xi, \eta) = N_2(\xi) N_3(\eta)$$

é esquematicamente descrito na Figura 8.27.

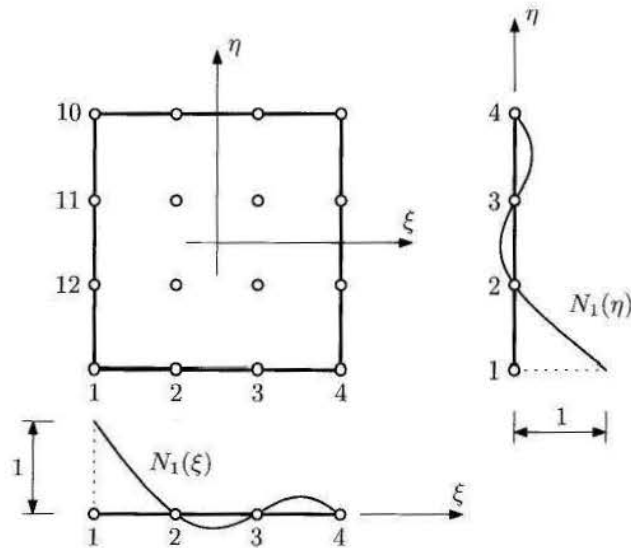


Figura 8.25 Determinação da função de forma $N_1(\xi, \eta)$ do elemento rectangular quártico lagrangiano (de 16 nós).

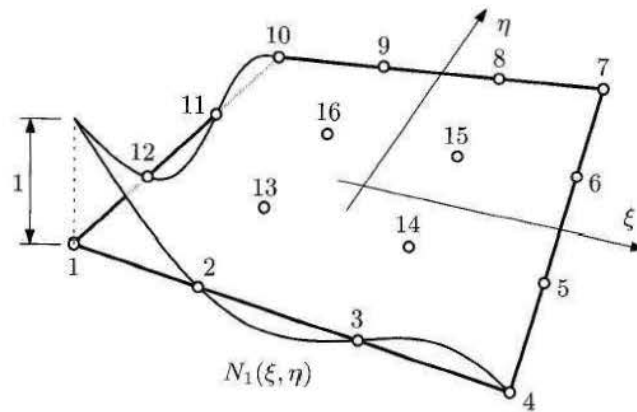


Figura 8.26 Representação esquemática da função de forma $N_1(\xi, \eta)$ do elemento rectangular quártico lagrangiano (de 16 nós).

Para os restantes nós do elemento finito, a determinação das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ é deixada como exercício.

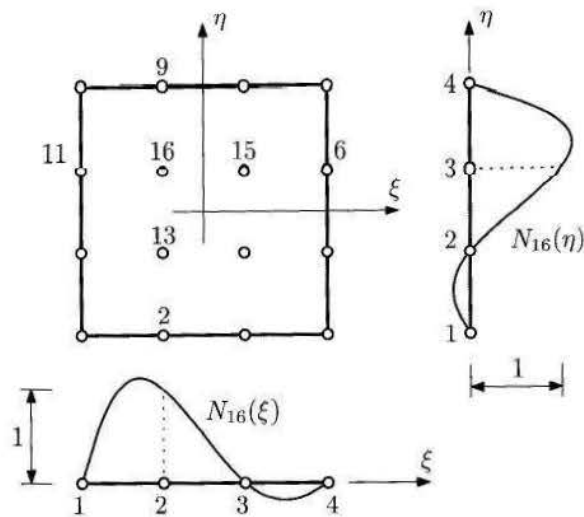


Figura 8.27 Procedimento para a determinação da função de forma $N_{16}(\xi, \eta)$ do elemento rectangular quártico lagrangiano (de 16 nós).

8.6 Integração analítica das matrizes elementares

Depois de definidas as coordenadas de um ponto de um dado elemento finito em relação às coordenadas nodais, através de relações isoparamétricas, determinam-se os campos de deformações e de tensões no elemento finito, mantendo em mente as relações descritas para os estados planos de tensão ou de deformação na Secção 8.3.

Para determinar o campo de deformações no elemento é necessário calcular a variação dos graus de liberdade envolvidos relativamente a variações infinitesimais de posição no sistema de eixos Oxy . Estas derivadas foram já definidas de forma genérica na equação 8.6 e, em particular, para elementos finitos triangulares de três nós na equação 8.56. Em ambos os casos, pretende-se obter os termos que irão formar a matriz das derivadas das funções de forma (ver equação 8.56), que relaciona o campo de deslocamentos com o campo de deformações do elemento, e que é composta por um conjunto de submatrizes do tipo

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (8.93)$$

definido, neste caso, apenas para a contribuição do nó i ($i = 1, \dots, n_{\text{nos}}$). A matriz das derivadas das funções de forma total do elemento vai ter, assim, uma dimensão de $3 \times (n_{\text{nos}} \times n_{\text{gln}})$ em que, mais uma vez, n_{nos} se refere ao número de nós do elemento, enquanto que n_{gln} indica o número total de graus de liberdade em cada nó do elemento finito.

Partindo do conceito de interpolação isoparamétrica em termos das funções de forma definidas no referencial natural $O\xi\eta$, utilizado nas secções anteriores, importa agora calcular as derivadas que compõem a matriz $\mathbf{B}^e$ do elemento finito e . Desta forma, recorrendo à regra de derivação em cadeia das funções de forma para um nó genérico i , chega-se a

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \quad (8.94)$$

ou, de forma equivalente em termos matriciais, a

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (8.95)$$

Na expressão anterior destaca-se a matriz jacobiana do elemento

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (8.96)$$

responsável pelo mapeamento de derivadas parciais de primeira ordem entre o referencial global Oxy e o referencial natural $O\xi\eta$ do elemento. Assumindo que a matriz $\mathbf{J}$ tem inversa, pode determinar-se que

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix}. \quad (8.97)$$

É possível garantir que a inversa da matriz jacobiana existe desde que haja uma correspondência biunívoca entre as configurações geométricas do elemento finito nos referenciais global e natural. Tal acontece, normalmente, em elementos finitos com as configurações mais usuais e níveis aceitáveis de distorção. No entanto, aquela correspondência deixa de existir, por exemplo, em situações como a representada na Figura 8.28, em que dois dos lados de um elemento finito linear compartilham um ângulo interno maior do que π radianos, isto é, superior a 180° .

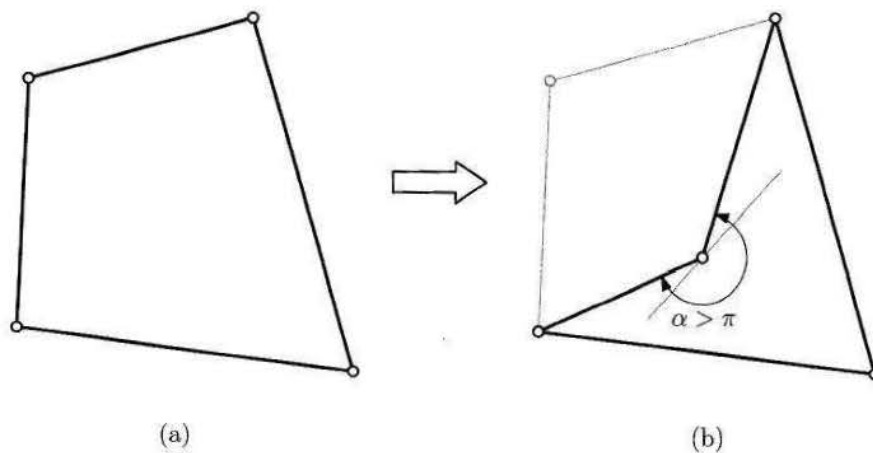


Figura 8.28 Exemplo de nível de distorção para o qual se verificam singularidades no cálculo de $\mathbf{J}^{-1}$: (a) elemento finito linear na geometria original e (b) o mesmo elemento finito linear distorcido.

Explicitando analiticamente a inversa da matriz jacobiana na relação matricial 8.97, obtém-se

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix}. \quad (8.98)$$

Adicionalmente, o determinante da matriz jacobiana relaciona directamente as áreas infinitesimais calculadas nos referenciais global e natural, na seguinte forma:

$$dx dy = \det \mathbf{J} d\xi d\eta. \quad (8.99)$$

O cálculo explícito das derivadas indicadas na definição da matriz jacobiana (ver equação 8.96) obtém-se directamente a partir de

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{cases} \quad (8.100)$$

ou, de forma mais compacta, como

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}. \quad (8.101)$$

Para o caso particular do elemento finito rectangular bilinear de quatro nós, representado na Figura 8.13, e admitindo que a origem do referencial natural do elemento coincide com o seu centro geométrico (x_c, y_c) , chega-se a

$$\begin{cases} x = a\xi + x_c \\ y = b\eta + y_c \end{cases} \quad (8.102)$$

e, consequentemente, a

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}. \quad (8.103)$$

Assim, o determinante da matriz jacobiana é

$$\det \mathbf{J} = ab. \quad (8.104)$$

A característica do operador jacobiano possuir termos independentes das coordenadas naturais (ξ, η) decorre directamente de se considerar que o elemento finito é (perfeitamente) rectangular. Esta característica também é compartilhada pelos elementos finitos triangulares de lados rectos, descritos e analisados na Secção 8.4.1. Nestes casos, o cálculo analítico da matriz de rigidez elementar num estado plano de tensão ou de deformação, com espessura t constante, faz-se do seguinte modo:

$$\mathbf{k}^e = \iint_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t dx dy, \quad (8.105)$$

partindo da matriz constitutiva $\mathbf{D}$, descrita nas equações 8.16 e 8.17 para o estado plano de tensão, e 8.22 e 8.23 para o estado plano de deformação. Note-se que a relação 8.105 é a generalização da equação unidimensional 7.75 a domínios bidimensionais, sobre a área do elemento finito. No entanto, no caso geral dos elementos distorcidos e/ou com lados curvos, o cálculo analítico do integral duplo da relação 8.105 pode ser substituído por um duplo somatório, característico de um procedimento de integração numérica.

8.7 Integração numérica em duas dimensões

No seguimento dos assuntos tratados no final do Capítulo 7, o conceito de integração numérica é agora estendido ao domínio bidimensional, recorrendo novamente à utilização da quadratura de Gauss-Legendre. O objectivo é transformar a formulação integral contínua sobre o domínio físico do elemento em somatórios num conjunto discreto de pontos do mesmo elemento finito, definido no espaço normalizado associado às coordenadas naturais.

Matematicamente, trata-se de calcular o integral duplo, isto é, a duas dimensões, de uma função genérica qualquer $f(\xi, \eta)$, definida em termos do sistema de coordenadas naturais $O\xi\eta$, através da igualdade

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{r=1}^{n_r} \sum_{s=1}^{n_s} f(\xi_r, \eta_s) w_r w_s, \quad (8.106)$$

em que n_r e n_s são os números de pontos de integração a serem adoptados ao longo das direcções $O\xi$ e $O\eta$, respectivamente. Por outro lado, ξ_r e η_s são as coordenadas no referencial natural do ponto de amostragem (r, s) — o ponto de integração. Finalmente, w_r e w_s são os pesos a considerar em função dos pontos de integração escolhidos.

As posições e os pesos correspondentes aos pontos de integração para regras de quadratura de várias ordens são escolhidos do mesmo modo que no caso unidimensional. Na Tabela 7.1 apresentam-se precisamente estas coordenadas e pesos que, aplicados alternadamente às orientações $O\xi$ e $O\eta$ do elemento finito, conduzem às localizações que se mostram na Figura 8.29. Por uma questão de clareza, não são representados na Figura 8.29 os pesos associados a cada ponto

de integração. No entanto, esta informação encontra-se representada de forma mais completa na Tabela 7.1.

De forma semelhante ao que foi apresentado aquando da definição dos elementos finitos unidimensionais (ver Capítulo 7), a escolha de uma quadratura de ordem n segundo uma coordenada natural é suficiente para integrar de forma exacta um polinómio de grau igual ou inferior a $2n - 1$.

No caso de integrações numéricas realizadas sobre domínios triangulares rectos ou curvos, o processo torna-se um pouco mais elaborado, uma vez que os limites de integração envolvem as próprias coordenadas naturais, ao contrário dos domínios fixos $[-1, +1]$ utilizados nos elementos quadriláteros definidos anteriormente. No entanto, é possível definir pontos de integração próprios, assim como os respectivos pesos de integração, para elementos finitos triangulares genéricos. Na Figura 8.30 estão representadas várias ordens de integração numa alternativa possível de sistematizar um procedimento semelhante ao utilizado nos elementos quadriláteros.

A expressão geral para a integração numérica para o caso dos elementos finitos triangulares apresenta a seguinte forma:

$$\iint_{A^e} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n_r} \sum_{s=1}^{n_s} f(\xi_r, \eta_s) w_r w_s. \quad (8.107)$$

Exercício 8.5. Determine a área de um elemento finito triangular rectângulo de três nós recorrendo à técnica de integração numérica.

Resolução

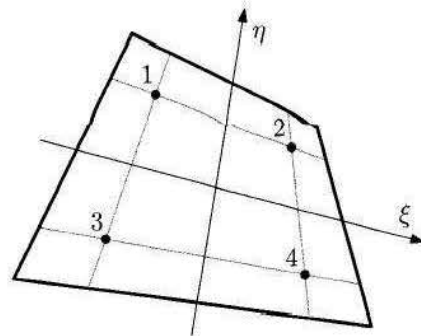
Considerando o elemento finito triangular rectângulo que se mostra na Figura 8.31, adopta-se sistema ortogonal natural representado.

A posição de um qualquer ponto sobre o lado inclinado do elemento é caracterizada pela seguinte equação:

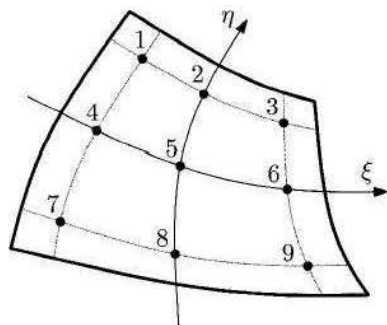
$$\xi + \eta - 1 = 0,$$

o que faz com que o limite de integração passe a ser uma função das próprias coordenadas naturais, tal como referido anteriormente.

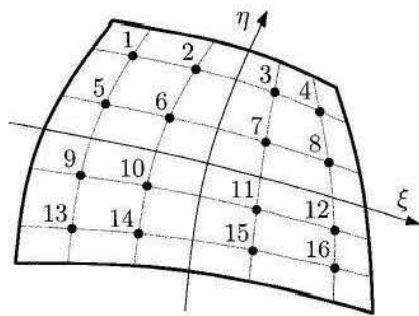
Relativamente às coordenadas globais Oxy do elemento (não representadas na Figura 8.31), o cálculo da área do elemento finito pode ser efectuado recorrendo à equação



(a)



(b)



(c)

(a) Ordem de integração: 2×2

$$\begin{array}{ll} \xi_1 = -0,577... & \eta_1 = +0,577... \\ \xi_2 = +0,577... & \eta_2 = +0,577... \\ \xi_3 = -0,577... & \eta_3 = -0,577... \\ \xi_4 = +0,577... & \eta_4 = -0,577... \end{array}$$

(b) Ordem de integração: 3×3

$$\begin{array}{ll} \xi_1 = -0,774... & \eta_1 = +0,774... \\ \xi_2 = 0... & \eta_2 = +0,774... \\ \xi_3 = +0,774... & \eta_3 = +0,774... \\ \xi_4 = -0,774... & \eta_4 = 0... \\ \xi_5 = 0... & \eta_5 = 0... \\ \xi_6 = +0,774... & \eta_6 = 0... \\ \xi_7 = -0,774... & \eta_7 = -0,774... \\ \xi_8 = 0... & \eta_8 = -0,774... \\ \xi_9 = +0,774... & \eta_9 = -0,774... \end{array}$$

(c) Ordem de integração: 4×4

$$\begin{array}{ll} \xi_1 = -0,861... & \eta_1 = +0,861... \\ \xi_2 = -0,339... & \eta_2 = +0,861... \\ \xi_3 = +0,339... & \eta_3 = +0,861... \\ \xi_4 = +0,861... & \eta_4 = +0,861... \\ \xi_5 = -0,861... & \eta_5 = +0,339... \\ \xi_6 = -0,339... & \eta_6 = +0,339... \\ \xi_7 = +0,339... & \eta_7 = +0,339... \\ \xi_8 = +0,861... & \eta_8 = +0,339... \\ \xi_9 = -0,861... & \eta_9 = -0,339... \\ \xi_{10} = -0,339... & \eta_{10} = -0,339... \\ \xi_{11} = +0,339... & \eta_{11} = -0,339... \\ \xi_{12} = +0,861... & \eta_{12} = -0,339... \\ \xi_{13} = -0,861... & \eta_{13} = -0,861... \\ \xi_{14} = -0,339... & \eta_{14} = -0,861... \\ \xi_{15} = +0,339... & \eta_{15} = -0,861... \\ \xi_{16} = +0,861... & \eta_{16} = -0,861... \end{array}$$

Figura 8.29 Coordenadas, em domínios bidimensionais, para os pontos de integração definidos pela quadratura de Gauss-Legendre. Elemento finito com (a) quatro pontos de integração, (b) nove pontos de integração e (c) dezasseis pontos de integração.

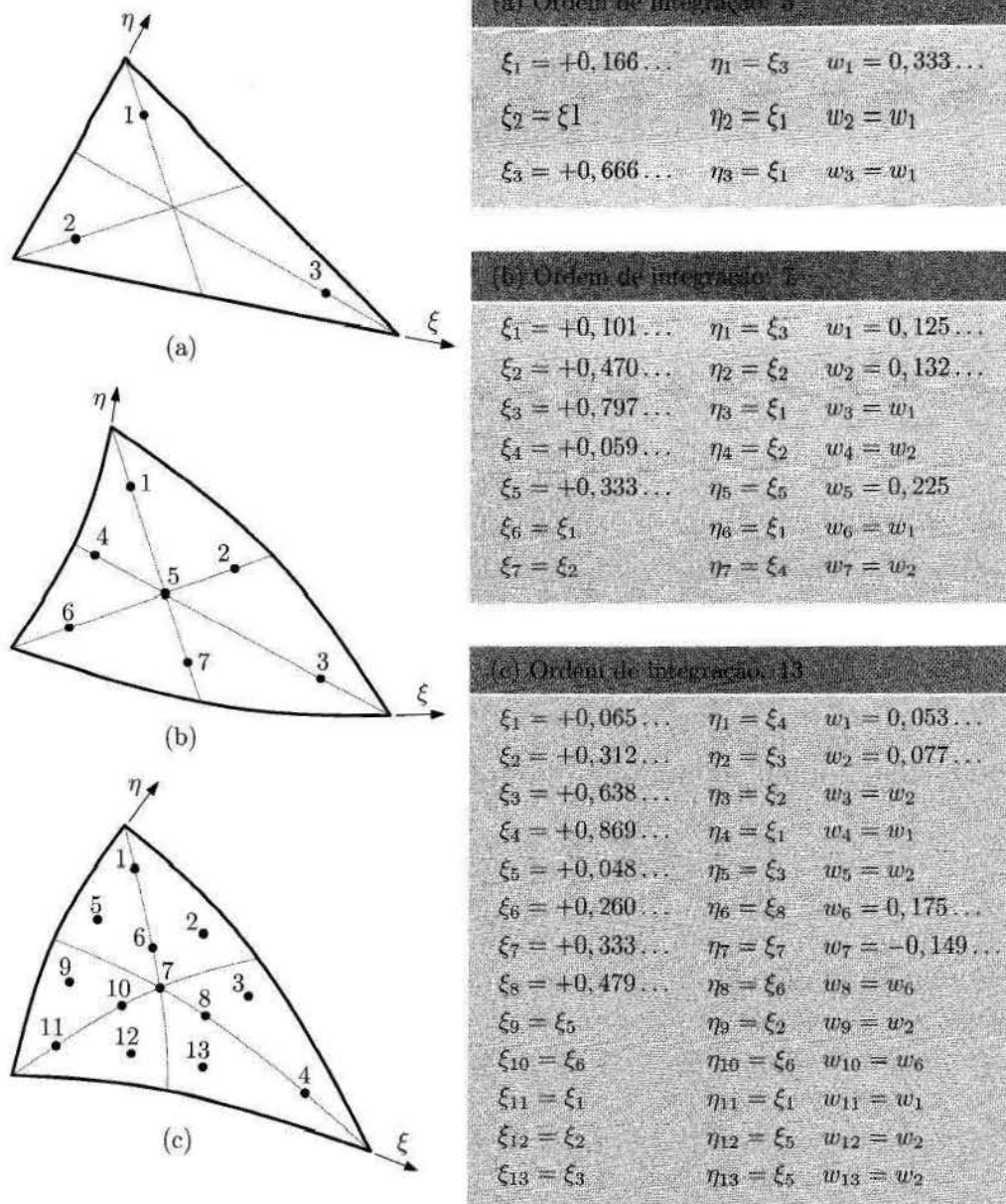


Figura 8.30 Coordenadas e respectivos pesos, em domínios triangulares, para os pontos de integração definidos pela quadratura de Gauss-Legendre. Elemento finito com (a) três pontos de integração, (b) sete pontos de integração e (c) treze pontos de integração.

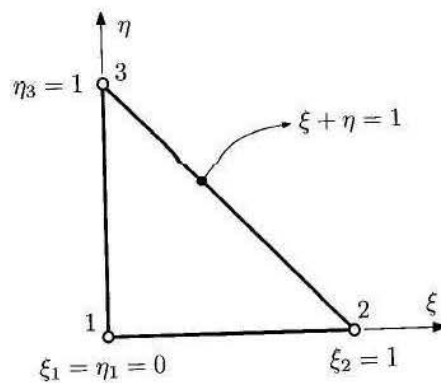


Figura 8.31 Elemento finito triangular rectângulo de três nós genérico.

$$A^e = \iint_{A^e} dx dy.$$

Aplicando a relação 8.99 aos operadores infinitesimais anteriores, obtém-se

$$A^e = \iint_{A^e} dx dy = \int_0^{+1} \int_0^{1-\eta} \det \mathbf{J} d\xi d\eta.$$

Para o elemento de lados rectos considerado, o operador jacobiano pode ser obtido directamente em função das coordenadas nodais no referencial global, isto é,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{bmatrix}.$$

O determinante deste jacobiano é, consequentemente, constante. Aplicando esta condição à equação anterior de cálculo da área A^e do elemento finito em conjunto com o conceito de integração numérica em substituição do integral, obtém-se

$$\int_0^{+1} \int_0^{1-\eta} \det \mathbf{J} d\xi d\eta = \det \mathbf{J} \sum_{r=1}^{n_r} w_r,$$

que, como se pode verificar, é função apenas do somatório do valor dos pesos associados à regra de quadratura utilizada na integração numérica.

Da análise dos valores dos pesos, conforme se mostra na Figura 8.30, pode observar-se que o seu somatório é sempre igual a 1. Por outro lado, o determinante do operador jacobiano, que surge na relação anterior, decorrente da mudança de variáveis $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$, corresponde numericamente ao dobro da

área do elemento, ou seja,

$$\det \mathbf{J} = 2A^e.$$

Tal significa que se verificou uma duplicação do valor da área do elemento triangular apenas pela adopção da integração numérica através dos pontos de amostragem representados na Figura 8.30.

Essa constatação justifica a utilização do factor $\frac{1}{2}$ na expressão de integração numérica para os elementos triangulares da equação 8.107, factor esse que não aparece nas expressões para a integração numérica em elementos finitos quadriláteros.

8.8 Escolha da ordem de integração a utilizar

Em termos práticos, há uma questão fundamental relativa ao uso da integração numérica no processo de definição das matrizes elementares numa análise pelo método dos elementos finitos. Esta questão prende-se com a escolha da ordem de integração a utilizar, ou seja, para um dado elemento com um determinado número de nós, qual é o número ideal de pontos de integração — também designados por pontos de Gauss — a adoptar?

A escolha do número de pontos de Gauss a utilizar na integração numérica influencia directamente o custo computacional da análise por elementos finitos. O aumento do tempo de cálculo é consequência directa, por exemplo, do uso de integrações numéricas de ordens mais elevadas. Por outro lado, ainda mais importante é a constatação de que diferentes ordens de integração podem conduzir, para a mesma malha de elementos finitos, a diferentes resultados finais após a fase de assemblagem das matrizes de rigidez e dos vectores de forças internas elementares.

Em teoria, subir a ordem de integração conduz a resultados sucessivamente mais correctos. Da mesma forma, a utilização de poucos pontos de integração (no limite apenas um, localizado no centro do elemento) pode conduzir a resultados incorrectos ou mesmo impossibilitar a própria integração numérica. No caso particular do cálculo por integração numérica da matriz de rigidez elementar, a utilização de apenas um ponto de integração pode dar origem a uma matriz com um elevado número de valores próprios nulos. Este número de valores próprios pode ser superior ao número de modos de deformação de corpo rígido que o elemento efectivamente reproduz.

No entanto, mesmo na situação descrita no parágrafo anterior, os modos de deformação adicionais, que surgem associados a uma integração relativamente reduzida a nível elementar, podem não afectar a solução final (após assemblagem de todas as matrizes de rigidez elementares) se estiverem garantidas condições de fronteira que assegurem que a estrutura, como um todo, esteja suficientemente restringida. Caso essa condição não seja garantida para a malha de elementos finitos completa, a matriz de rigidez global torna-se singular, ou seja, sem inversa.

Em alternativa, no lugar da integração reduzida é possível aplicar o conceito de integração completa. Este tipo de integração está associado ao grau de interpolação mínimo requerido para que a integração numérica produza os mesmos resultados que a integração analítica original, quando os respectivos elementos não se encontram distorcidos. Com base nesta ideia, é possível definir a ordem de integração completa para uma série de elementos finitos bidimensionais, conforme se mostra na Figura 8.32 para os elementos quadriláteros lagrangianos descritos nas secções anteriores. As posições dos pontos de Gauss segundo as direcções do sistema de coordenadas natural podem ser obtidas para cada ordem de integração recorrendo ao esquema das Figuras 8.29 e 8.32. Convém referir que a aplicação dos esquemas de integração indicados na Figura 8.32 não conduzirão, por meio da integração numérica, aos resultados analíticos para elementos finitos com configurações distorcidas. Porém, a aproximação será ainda assim aceitável. No entanto, há autores que defendem o uso de ordens de integração superiores às referidas na Figura 8.32 para o caso da análise de elementos geometricamente muito distorcidos ou quando se analisa o comportamento de sistemas não-lineares.

Um outro ponto que merece ser aqui mencionado é o facto de, na prática, muitas vezes serem utilizados propositadamente procedimentos de integração de ordem inferior aos representados na Figura 8.32, isto é, procedimentos de integração reduzida. Em determinadas circunstâncias, os resultados obtidos recorrendo à integração completa (descrita nos parágrafos anteriores) conduzem a respostas estruturais que apresentam um excesso de rigidez relativamente à solução física (ou matemática) correcta. Este comportamento é denominado de retenção numérica¹. Neste contexto, a integração reduzida é, historicamente, uma das primeiras técnicas utilizadas para aumentar a flexibilidade dos elementos finitos, diminuindo o excesso de rigidez que seria obtido numericamente. Ao fim e ao cabo, este procedimento consiste na utilização de regras de integra-

¹ Em inglês: *locking*.

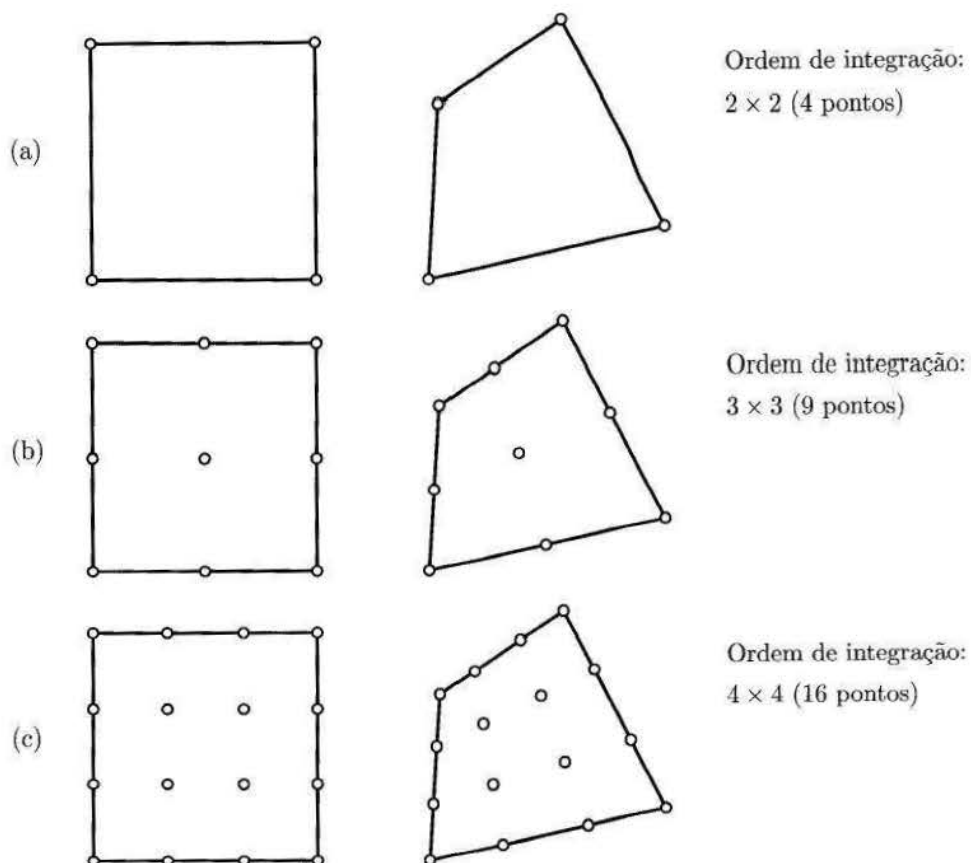


Figura 8.32 Ordens de integração numérica completa para elementos finitos quadriláteros lagrangianos de (a) quatro nós, (b) nove nós e (c) dezasseis nós.

ção com menos pontos de Gauss do que aqueles preconizados pela integração completa.

8.9 Determinação da rigidez e das forças nodais equivalentes em elementos bidimensionais

Tendo sido discutidos nas secções anteriores os procedimentos inerentes à integração numérica em domínios bidimensionais, é possível retomar a expressão que conduz à matriz de rigidez elementar (equação 8.105), no domínio Oxy , e representá-la no contexto de um referencial natural $O\xi\eta$, para um elemento finito quadrilátero, na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}^e &= \iint_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t dx dy \\
&= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} (\det \mathbf{J}^e) t d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{8.108}$$

Através de uma aproximação por integração numérica de Gauss-Legendre do integral analítico definido pela relação anterior, chega-se a

$$\mathbf{k}^e \approx \sum_{r=1}^{n_r} \sum_{s=1}^{n_s} (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J}^e)_{r,s} t w_r w_s. \tag{8.109}$$

A ordem de integração e os respectivos pontos de interpolação para a integração numérica são, por exemplo, os indicados nas Figuras 8.29 e 8.32. Na equação anterior assume-se que a espessura do elemento é constante, caso contrário o seu valor individual e a respectiva variação discreta, a nível dos pontos de interpolação, devem ser tidos em conta no duplo somatório.

As equações anteriores são representativas da integração analítica, quer no domínio físico Oxy quer no domínio isoparamétrico $O\xi\eta$, para um elemento quadrilátero e da respectiva aproximação por integração numérica. No caso de elementos triangulares, e no seguimento da demonstração descrita no Exercício 8.5, obtém-se

$$\mathbf{k}^e = \int_0^{+1} \int_0^{1-\eta} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} (\det \mathbf{J}^e) t d\xi d\eta, \tag{8.110}$$

em conformidade com a representação da Figura 8.31. Consequentemente, a aproximação por integração numérica da equação anterior resulta em

$$\mathbf{k}^e \approx \sum_{s=1}^{n_s} (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J}^e)_s t w_s. \tag{8.111}$$

Estando o elemento finito sujeito a um carregamento específico por unidade de área no plano Oxy , o cálculo das forças nodais equivalentes passa pela determinação do integral

$$\mathbf{f}_b^e = \int_{A^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} t dA, \tag{8.112}$$

em que $\mathbf{b}$ representa o vector de forças distribuídas na área do elemento, A^e . Estendendo o integral duplo ao espaço físico Oxy , chega-se a

$$\mathbf{f}_b^e = \iint_{A^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} t dx dy, \quad (8.113)$$

que, para um elemento finito quadrilátero e depois de transformado para o referencial natural, conduz ao seguinte resultado:

$$\mathbf{f}_b^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^T \mathbf{b} (\det \mathbf{J}^e) t d\xi d\eta. \quad (8.114)$$

Aproximando o integral duplo anterior por integração numérica, de forma análoga à adoptada para a obtenção da matriz de rigidez, obtém-se

$$\mathbf{f}_b^e \approx \sum_{r=1}^{n_r} \sum_{s=1}^{n_s} (\mathbf{N}^T \mathbf{b} \det \mathbf{J}^e)_{r,s} t w_r w_s. \quad (8.115)$$

Finalmente, interessa analisar o caso em que existem carregamentos distribuídos aplicados ao longo das arestas dos elementos, no plano Oxy . No domínio isoparamétrico, tal situação corresponde a existir uma carga distribuída ao longo de uma direcção ξ constante, η constante ou à sobreposição de ambas as situações, em que o vector de forças distribuídas possui componentes segundo, respectivamente, as direcções físicas Ox , Oy ou ambas.

A título de exemplo, representa-se na Figura 8.33 um caso particular de um carregamento uniformemente distribuído e aplicado ao longo da direcção Oy , sobre uma aresta com coordenada natural η constante de um elemento quadrilátero de quatro nós.

De forma a determinar o valor das forças nodais equivalentes para um carregamento deste tipo, é necessário relacionar o comprimento de um segmento infinitesimal definido no espaço isoparamétrico $O\xi\eta$ com o seu correspondente no espaço físico cartesiano Oxy . Esta relação, para o caso do carregamento sobre a aresta η constante, representado na Figura 8.33, é

$$(dl)_{\eta=1} = (dx^2 + dy^2)_{\eta=1}. \quad (8.116)$$

Manipulando esta equação, obtém-se

$$(dl)_{\eta=1} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)_{\eta=1}^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)_{\eta=1}^2} d\xi. \quad (8.117)$$

Discretizando os diferenciais anteriores em termos das funções de forma do elemento finito, chega-se a

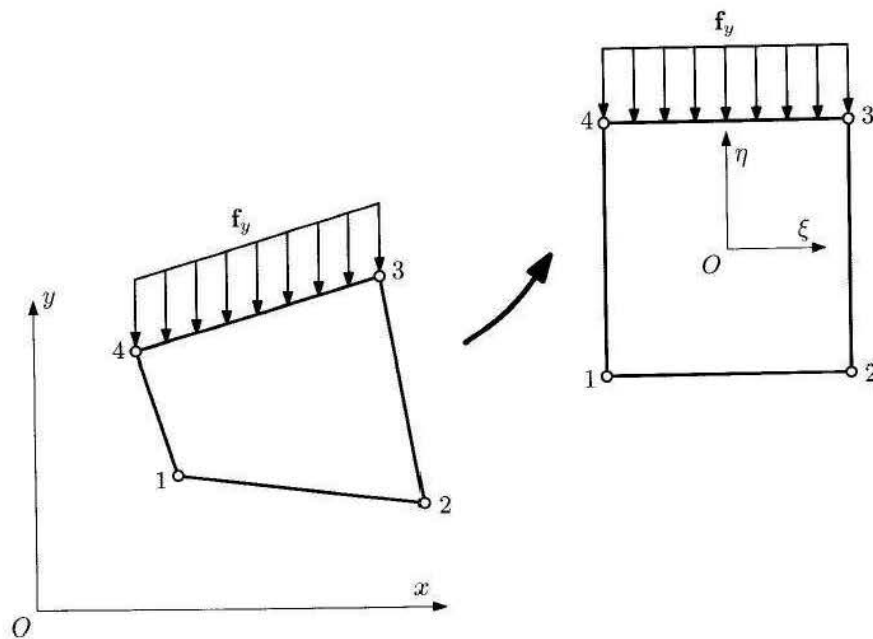


Figura 8.33 Força distribuída numa aresta de um elemento finito quadrilátero de quatro nós no plano Oxy e no espaço isoparmétrico $O\xi\eta$.

$$(dl)_{\eta=1} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{dN_i}{d\xi} x_i\right)_{\eta=1}^2 + \left(\sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{dN_i}{d\xi} y_i\right)_{\eta=1}^2} d\xi, \quad (8.118)$$

em que n_{nos} designa o número total de nós do elemento. Uma vez determinada a relação entre o comprimento do segmento infinitesimal nos referenciais cartesianos e naturais, é possível obter o vector de forças nodais equivalentes correspondente ao vector de forças distribuídas na aresta do elemento. A expressão geral, a partir de um vector de forças distribuídas genérico $\mathbf{f}$, pode ser dada pelo seguinte integral de linha:

$$\mathbf{f}^e = \oint_{l^e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} t dl. \quad (8.119)$$

Note-se a presença na equação anterior do termo correspondente à espessura do elemento (na direcção perpendicular ao plano Oxy). Tal remete para a verdadeira natureza do carregamento que é considerado no raciocínio descrito nos parágrafos anteriores, ou seja, um carregamento sobre uma face no plano Oxz , Oyz ou ambos, mas considerado sobre uma aresta do ponto de vista do plano de referência do elemento finito — o plano Oxy . Para o caso particular do car-

regamento e elemento representados na Figura 8.33, a expressão anterior pode também ser escrita na forma

$$\mathbf{f}^e = \oint_{l^e} (\mathbf{N}^T)_{\eta=1} \mathbf{f}t(dl)_{\eta=1}. \quad (8.120)$$

Substituindo a expressão 8.118 na equação anterior, torna-se possível definir o vector das forças nodais equivalentes em função da coordenada natural ξ . O integral de linha que se obtém pode ser resolvido através de uma integração numérica em uma dimensão, de forma análoga ao que foi mostrado em detalhe no Capítulo 7.

8.10 Elementos finitos axissimétricos

O estudo do comportamento de corpos de revolução, isto é, que possuem simetria em torno de um determinado eixo, pode ser realizado recorrendo a elementos sólidos tridimensionais, conforme se mostrará no Capítulo 9. Todavia, os elementos finitos axissimétricos permitem realizar a mesma tarefa com um peso computacional substancialmente inferior. Exemplos clássicos de aplicação dos elementos finitos axissimétricos são o estudo de silos, reservatórios sob pressão (RSP), tanques atmosféricos, torres de arrefecimento, *etc.*, ou seja, problemas em que não só a geometria é de revolução mas também os carregamentos e as condições de fronteira têm simetria axial. Na Figura 8.34 mostram-se alguns exemplos de aplicação dos elementos finitos axissimétricos.

A formulação de elementos finitos utilizada em análises axissimétricas é análoga à utilizada nos problemas (bidimensionais) de estados planos de tensão ou de deformação. Consequentemente, consideram-se dois graus de liberdade por nó, designados por u e v , em cada secção transversal do sólido de revolução modelado. Esta abordagem está representada de forma esquemática na Figura 8.35, em que u corresponde ao deslocamento na direcção radial Or e v corresponde ao deslocamento na direcção axial Oz . As funções de forma para interpolação do campo de deslocamentos são as mesmas que as utilizadas na análise bidimensional, descrita de forma detalhada em secções anteriores deste capítulo.

A diferença entre a análise de problemas axissimétricos e de problemas bidimensionais reside no facto de no primeiro caso se considerarem deformações e tensões circunferenciais, isto é, fora do plano do elemento finito axissimétrico. Consequentemente, deverá considerar-se uma quarta componente no vector das

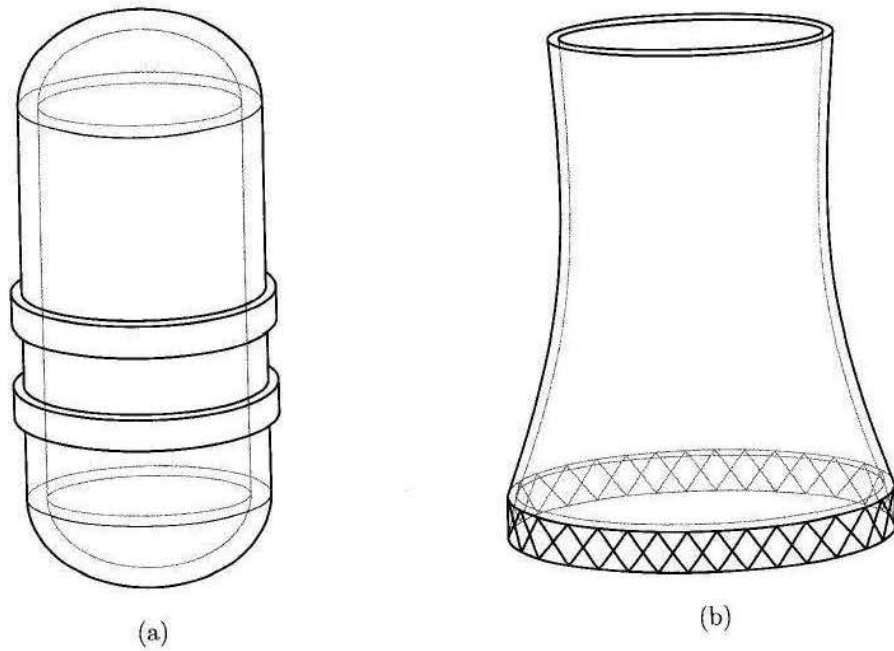


Figura 8.34 Exemplos de aplicação dos elementos finitos axissimétricos: (a) reservatório sob pressão e (b) torre de arrefecimento.

deformações, designada por ε_θ (representada na Figura 8.36), que representa a deformação fora do plano Orz e é devida à deformação axial e ao consequente aumento (ou diminuição) do perímetro, isto é,

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(r + u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}. \quad (8.121)$$

Assim, no caso do vector de deformações, existem três componentes no plano: a componente radial ε_r , a componente axial ε_z e a componente angular γ_{rz} . Existe ainda uma componente de deformação fora do plano: a deformação ε_θ . Estas componentes de deformação podem organizar-se de forma matricial como

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{Bmatrix}. \quad (8.122)$$

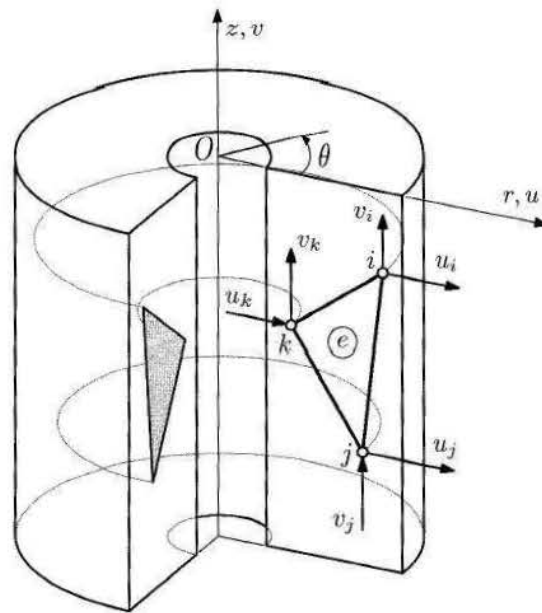


Figura 8.35 Exemplo de um sólido de revolução que pode ser modelado por elementos finitos axissimétricos. Representação de um elemento finito axissimétrico genérico e e respectivos graus de liberdade de deslocamento.

8.10.1 Campos de deslocamentos e de deformações

Quer para elementos triangulares axissimétricos de primeira ordem, isto é, com três nós, quer para elementos quadriláteros axissimétricos de primeira ordem, isto é, com quatro nós, a interpolação dos deslocamentos nodais é levada a cabo utilizando polinómios de primeira ordem. Este procedimento genérico, que já foi descrito em secções anteriores deste capítulo, pode ser descrito pela seguinte relação matricial:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}, \quad (8.123)$$

em que $\mathbf{d} = \{u_1, v_1, \dots, u_{n_{\text{nos}}}, v_{n_{\text{nos}}}\}^T$ representa o vector dos graus de liberdade nodais do elemento e

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & \dots & N_{n_{\text{nos}}} & 0 \\ 0 & N_i & \dots & 0 & N_{n_{\text{nos}}} \end{bmatrix} \quad (8.124)$$

é a matriz das funções de forma do elemento.

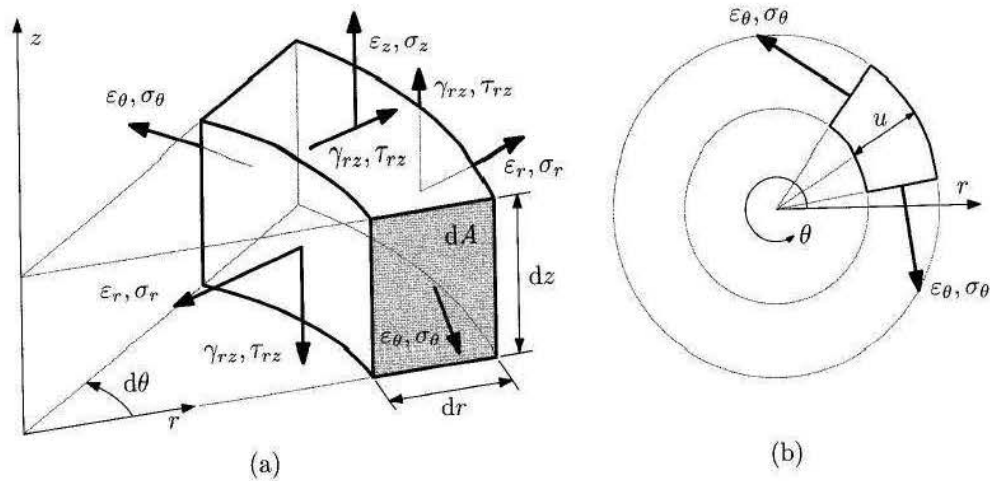


Figura 8.36 Representação esquemática das tensões actuantes num elemento finito axissimétrico: (a) campos de deformações e de tensões, e (b) deformação circunferencial ε_θ e tensão circunferencial σ_θ .

As funções de forma do elemento axissimétrico genérico e triangular de três nós, representado na Figura 8.35, são dadas por

$$N_i = \frac{\alpha_i + \beta_i r + \gamma_i z}{2A^e}, \quad (8.125)$$

em que A^e é a área do elemento finito considerado e $i = 1, \dots, 3$. Os coeficientes α_i , β_i e γ_i são definidos como

$$\begin{cases} \alpha_i = r_j z_k - r_k z_j \\ \beta_i = z_j - z_k \\ \gamma_i = r_k - r_j \end{cases}. \quad (8.126)$$

Os coeficientes i , j e k são obtidos por permutação cíclica como se mostra na Figura 8.4, isto é, se $i = 1$, então $j = 2$ e $k = 3$, se $i = 2$, então $j = 3$ e $k = 1$, e se $i = 3$, então $j = 1$ e $k = 2$.

Para o elemento finito quadrilátero de dimensões $2a \times 2b$, podem utilizar-se as funções de forma obtidas directamente a partir das coordenadas cartesianas nas direcções radial Or e axial Oz , isto é,

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(1 - \frac{z}{b}\right) \\ N_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(1 - \frac{z}{b}\right) \\ N_3 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{z}{b}\right) \\ N_4 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{z}{b}\right) \end{cases} \quad (8.127)$$

Em cada um dos casos, o campo das deformações, definido pela relação 8.122, pode ser obtido através da matriz das derivadas das funções de forma $\mathbf{B}$, ou seja,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}^e. \quad (8.128)$$

Assim, no caso de uma formulação axissimétrica, a matriz $\mathbf{B}$ é determinada a partir das matrizes $\mathbf{B}_i$ da seguinte forma:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{N_i}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix}, \quad (8.129)$$

em que $i = 1, \dots, 3$ para o elemento triangular e $i = 1, \dots, 4$ para o elemento quadrilátero, resultando numa matriz $\mathbf{B}$ com quatro linhas, correspondentes ao número de componentes independentes no vector das deformações, e com um número de colunas igual ao número de nós multiplicado pelos dois graus de liberdade por nó do elemento finito axissimétrico.

8.10.2 Campo de tensões

Tal como acontece no vector de deformações, devem considerar-se quatro componentes de tensão num problema a modelar por elementos finitos axissimétricos, isto é,

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix}. \quad (8.130)$$

Assumindo que não há tensões iniciais e desprezando o contributo de eventuais tensões de origem térmica, as tensões resultantes da deformação linear elástica do corpo sólido são calculadas através da matriz constitutiva $\mathbf{D}$. Como foi referido anteriormente, esta matriz, também designada por matriz de elasticidade, é definida em função do módulo de Young E e do coeficiente de Poisson ν , isto é,

$$\sigma = \mathbf{D}\epsilon \quad (8.131)$$

ou, de forma mais explícita,

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}. \quad (8.132)$$

8.10.3 Matriz de rigidez e vector de forças

O processo através do qual se determina a matriz de rigidez de cada elemento finito baseia-se no cálculo do integral já deduzido em secções anteriores desta obra. Porém, atendendo a que um elemento infinitesimal axissimétrico gera um volume anelar de dimensões $2\pi r dr dz$, chega-se à seguinte expressão:

$$\mathbf{k}^e = 2\pi \iint_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dr dz, \quad (8.133)$$

importando salientar que as coordenadas dependentes de r não são constantes, devendo por isso permanecer dentro do integral. Dada a relativa simplicidade dos termos envolvidos, o integral pode ser calculado analiticamente após uma multiplicação termo a termo das matrizes envolvidas. Alternativamente, o cálculo do integral no centróide do elemento finito de três nós do domínio triangular — o ponto de coordenadas $(\bar{r}, \bar{z})$ — conduz a resultados muito fiáveis. Procedendo deste modo, obtém-se

$$\mathbf{k}^e = 2\pi \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{r}} A^e, \quad (8.134)$$

em que $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}(\bar{r}, \bar{z})$ e

$$\begin{cases} \bar{r} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 r_i \\ \bar{z} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 z_i \end{cases} \quad (8.135)$$

Existem esquemas de integração numérica alternativos e mais elaborados. Porém, este método de integração revela-se extremamente rápido e computacionalmente eficaz, convergindo para a solução exacta do problema com um refinamento razoável da malha de elementos finitos.

No procedimento de cálculo do vector de forças do elemento finito, podem considerar-se casos distintos de cargas aplicadas. Por comparação directa com os elementos bidimensionais, deve ter-se em conta que um carregamento representado pontualmente num determinado nó actua, na realidade, ao longo de um anel formado pela rotação desse mesmo nó em torno do eixo de revolução do elemento. Assim, ao considerar uma carga nodal

$$\mathbf{q}_i = \begin{Bmatrix} q_r \\ q_z \end{Bmatrix}, \quad (8.136)$$

com componentes nas direcções radial e axial, o valor da força real aplicada é

$$\mathbf{f}_i = \begin{Bmatrix} f_r \\ f_z \end{Bmatrix} = 2\pi r_i \mathbf{q}_i, \quad (8.137)$$

em que r_i é a distância radial do centro ao nó onde a carga está aplicada. Todavia, uma vez que a aplicação mais comum dos modelos de elementos finitos axissimétricos é em reservatórios sob pressão, em silos, em tanques e em torres de arrefecimento, o tipo de carga mais comum é a volúmica. Adaptando a expressão 8.137 ao cálculo de forças devidas a uma carga volúmica

$$\mathbf{b}_i = \begin{Bmatrix} b_r \\ b_z \end{Bmatrix} \quad (8.138)$$

num caso axissimétrico, obtém-se

$$\mathbf{f}_i = 2\pi \iint_{A^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_i r dr dz. \quad (8.139)$$

A expressão anterior pode ser ainda mais simplificada considerando a integração numérica no centróide de um elemento triangular, obtendo-se

$$\mathbf{f}_i = 2\pi \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{b}}_i \bar{r} A^e. \quad (8.140)$$

8.10.4 Elementos axissimétricos isoparamétricos

Nas secções anteriores, demonstrou-se como as funções de forma dos elementos bidimensionais podem também ser utilizadas quer nos elementos axissimétricos triangulares quer nos elementos axissimétricos quadriláteros. Assim, à semelhança do que foi definido para os elementos bidimensionais, é possível considerar as funções de forma no referencial natural $O\xi\eta$ para posterior transformação para o referencial cartesiano Orz . Sem qualquer perda de generalidade, considerou-se o sistema de coordenadas Oxy no caso bidimensional. Consequentemente, seguindo as propriedades dos elementos isoparamétricos é possível determinar a matriz de rigidez definida na relação 8.133 no domínio isoparamétrico $\xi, \eta \in [-1, 1]$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^e &= 2\pi \iint_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dr dz \\ &= 2\pi \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r(\xi, \eta) (\det \mathbf{J}) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (8.141)$$

em que, seguindo as propriedades dos elementos finitos isoparamétricos, é possível afirmar que

$$r(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} N_i r_i. \quad (8.142)$$

De igual modo, o cálculo do vector de forças devido a eventuais cargas distribuídas, definido na equação 8.139, pode ser determinado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^e &= 2\pi \iint_{A^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_i r dr dz \\ &= 2\pi \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_i r(\xi, \eta) (\det \mathbf{J}) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (8.143)$$

Nas expressões anteriores, $\det \mathbf{J}$ é o jacobiano da transformação entre o referencial cartesiano Oxz e o referencial natural $O\xi\eta$.

Finalmente, procedendo de forma idêntica ao descrito nas secções anteriores, os integrais relativos ao cálculo da matriz de rigidez e do vector de forças nodais equivalentes podem ser determinados integrando numericamente com os pontos e os pesos de Gauss-Legendre definidos anteriormente, na seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{k}^e = 2\pi \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} [\mathbf{B}_{\xi_i, \eta_i}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{\xi_i, \eta_i} r(\xi_i, \eta_i) (\det \mathbf{J})] w_j w_i \\ \mathbf{f}_i^e = 2\pi \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} [\mathbf{N}_{\xi_i, \eta_i}^T \mathbf{b}_i r(\xi_i, \eta_i) (\det \mathbf{J})] w_j w_i \end{cases} \quad (8.144)$$

Problemas Propostos

Problema 8.1. Considere o elemento finito de oito nós representado na Figura 8.37 e determine as funções de forma de cada nó no domínio isoparamétrico, isto é, em função das suas coordenadas naturais.

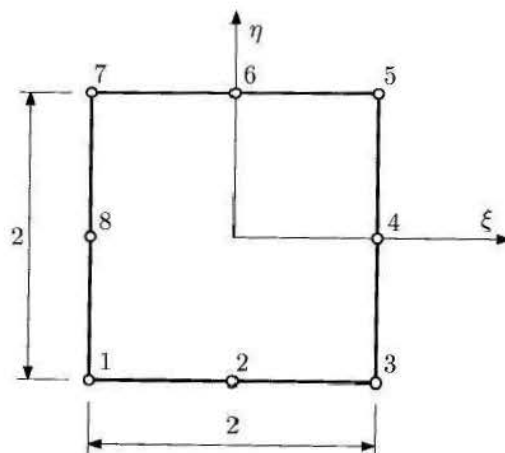


Figura 8.37 Elemento finito de oito nós do tipo serendipítico.

O elemento finito assim obtido designa-se por elemento do tipo serendipítico² e distingue-se do equivalente elemento finito quadrático lagrangiano pela

² Do inglês: *serendipity*.

ausência do nó interno (central), presente neste último. Como esse nó interno não contribui para a continuidade da solução entre os vários elementos de uma malha, a ideia é retirá-lo da formulação de forma a reduzir o número de graus de liberdade do problema a ser analisado e, conseqüentemente, a dimensão da matriz e do vector globais após assemblagem. Elementos de ordem mais elevada podem ser obtidos excluindo o(s) nó(s) interno(s), como é o caso, por exemplo, do elemento quadrilátero cúbico de 12 nós, equivalente ao elemento lagrangiano de 16 nós, com quatro nós internos.

Problema 8.2. Calcule as matrizes jacobianas dos elementos finitos bilineares representados na Figura 8.38.

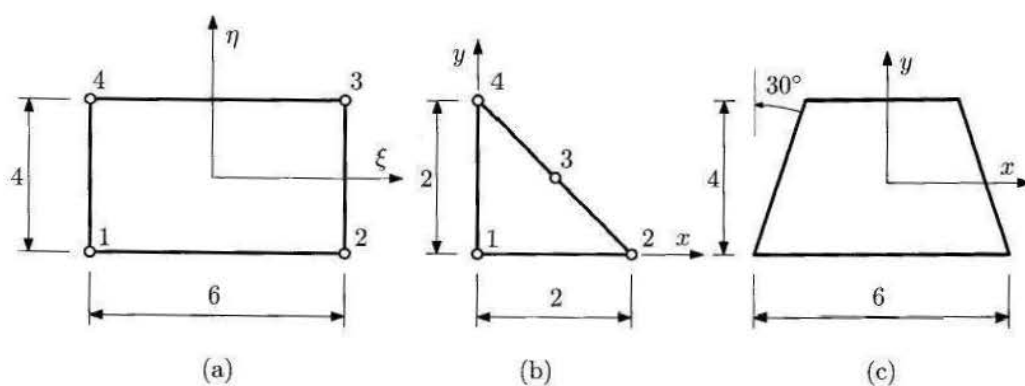


Figura 8.38 Exemplos de elementos finitos com quatro nós e diferentes graus de distorção.

Problema 8.3. Considere que a estrutura representada na Figura 8.39 está sujeita a um carregamento em estado plano de tensão e se encontra discretizada de dois modos distintos, isto é, sem e com distorção da malha. Considere que as dimensões representadas estão em metros, a força nodal aplicada é $F = 100$ N, o módulo de Young é $E = 210$ GPa e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,3$. A espessura dos elementos pode ser considerada como $t = 1$ mm, sendo o parâmetro de distorção $\Delta = 0,5$ m. Considere ainda que ambos os elementos

finitos são integrados numericamente de forma completa, ou seja, que a ordem de integração é 2×2 .

Determine o valor das reacções de força nos nós referentes aos apoios duplo e simples.

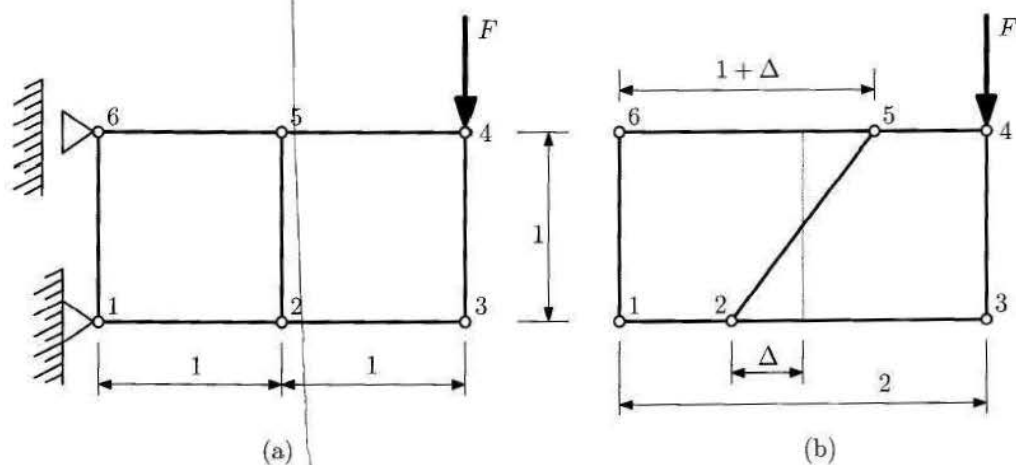


Figura 8.39 Estrutura sujeita a um carregamento em estado plano de tensão com (a) malha não-distorcida e (b) malha distorcida associada ao parâmetro de distorção Δ .

Problema 8.4. Para o exercício anterior, analise a influência do parâmetro de distorção Δ no valor das reacções obtidas nos nós 1 e 6, comparando os resultados com a solução analítica. Considere valores de Δ desde $\Delta = 0$ m, correspondente a uma malha não-distorcida, até $\Delta = 1,0$ m. Construa um gráfico com o valor obtido das reacções em função do parâmetro Δ .

Problema 8.5. Resolva novamente o Problema 8.3 recorrendo à utilização de um único elemento quadrático de nove nós e compare os valores obtidos para as reacções nos apoios da estrutura.

Problema 8.6. Demonstre que através do colapso de dois dos nós do elemento quadrilátero de quatro nós representado na Figura 8.40 se consegue obter um elemento triangular de deformação constante. Defina de forma genérica as funções de forma e as derivadas para o elemento bilinear, e particularize a solução para os nós que foram colapsados, atribuindo a ambos as mesmas coordenadas.

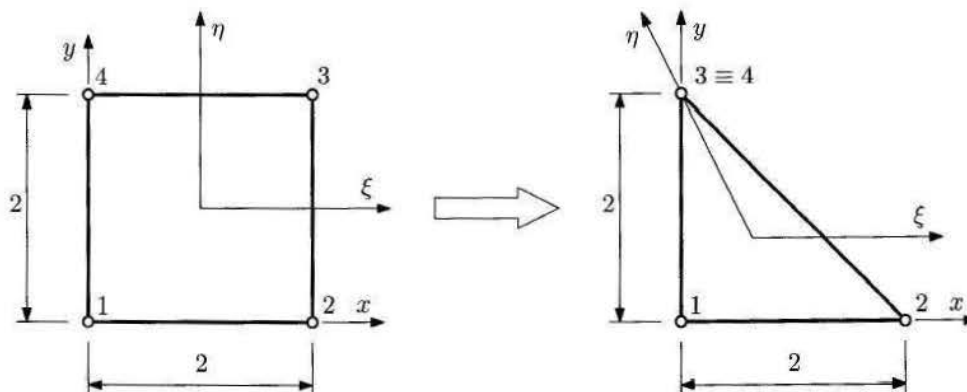


Figura 8.40 Obtenção de um elemento triangular de deformação constante a partir do colapso de dois nós de um elemento finito quadrilátero de quatro nós.

Problema 8.7. O sólido de revolução representado na Figura 8.41 tem as dimensões $b = 70 \text{ mm}$, $h = 40 \text{ mm}$ e $r_i = 30 \text{ mm}$, é construído em alumínio (módulo de elasticidade $E = 70 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,29$) e é modelado com um único elemento finito triangular axissimétrico. Para uma carga pontual $P = 30 \text{ N}$ aplicada no nó 3 (no plano Orz) e considerando que o nó 2 se encontra fixo em todos os seus graus de liberdade, calcule:

- O deslocamento do nó 1;
- O campo de tensões no sólido de revolução.

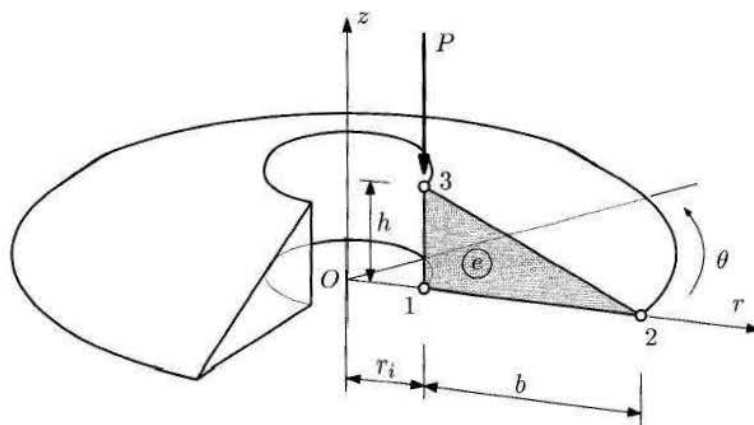


Figura 8.41 Representação de um sólido de revolução de alumínio, para o Exercício 8.7.

Referências Bibliográficas

1. Bathe, K.-J. *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Nova Jérsea, Estados Unidos da América, 1996.
2. Cowper, G.R. Gaussian Quadrature Formulas for Triangles, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7(3):405–408, 1973.
3. Dhondt, G. *The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications*, John Wiley & Sons, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2004.
4. Fish, J., Belytschko T. *A First Course in Finite Elements*, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido, 2007.
5. Liu, G.R., Quek, S.S. *The Finite Element Method — A Practical Course*, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2003.
6. Oñate, E. *Structural Analysis with the Finite Element Method — Linear Statics: Basis and Solids*, Vol. 1, Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences, Springer-Verlag, Berlim, Alemanha, 2009.
7. Reddy, J.N. *An Introduction to the Finite Element Method*, 3.^a edição, McGraw-Hill, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2005.
8. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method — The Basis*, Vol. 1, 5.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2000.

Resumo Neste capítulo são estudados os elementos finitos tridimensionais mais frequentemente utilizados, nomeadamente os tetraedros de primeira e de segunda ordens, e os hexaedros de primeira e de segunda ordens. Deduzem-se as expressões correspondentes para o cálculo do campo de deslocamentos através de funções de forma, bem como do campo de deformações e do campo de tensões linear elástico. Adicionalmente, descrevem-se em detalhe as expressões correspondentes para o cálculo da matriz de rigidez e do vector de forças para cada um dos tipos de elementos finitos tridimensionais estudados.

9.1 Introdução

São várias as razões que obrigam, frequentemente, à utilização de elementos finitos tridimensionais. Alguns problemas de engenharia não podem mesmo ser modelados por elementos finitos bidimensionais (2D). A razão mais evidente para este facto relaciona-se com a própria geometria do meio a estudar que é, muitas vezes, tridimensional (3D). Na Figura 9.1 mostram-se alguns exemplos de problemas de engenharia que não podem ser modelados recorrendo a abordagens de dimensão inferior à terceira. Todavia, outras razões podem levar à exigência de utilizar elementos finitos tridimensionais, nomeadamente:

- A necessidade de utilizar materiais com propriedades mecânicas distintas segundo as três direcções principais;
- A aplicação de cargas (ou condições de contacto) nodais em três ou mais planos distintos, tal como se mostra, por exemplo, na Figura 9.1(b);

- A necessidade de calcular valores nodais das variáveis de cálculo em três direcções distintas, isto é, não-coplanares;
- A conjugação de duas ou mais das razões anteriores.

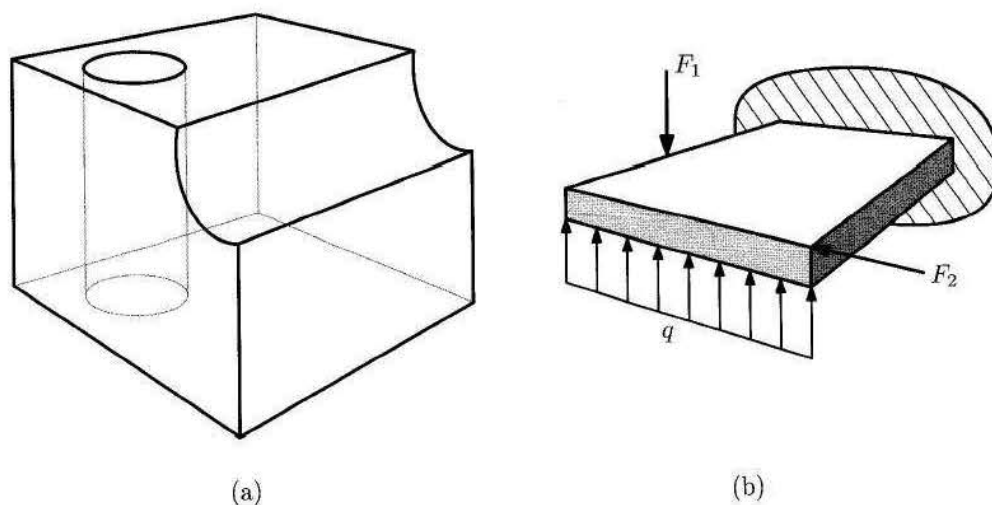


Figura 9.1 Exemplos de problemas de engenharia que têm de ser modelados recorrendo a abordagens tridimensionais: (a) problema de geometria complexa, que não permita uma abordagem simplificada com menos de três dimensões e (b) problema em que são aplicados carregamentos em planos distintos a que correspondam resultantes que tenham componentes em três direcções ortogonais.

Nas secções que se seguem descrevem-se os elementos finitos tridimensionais mais frequentemente utilizados em simulações com o método dos elementos finitos, nomeadamente os hexaedros e os tetraedros. Os primeiros consistem numa generalização dos elementos quadriláteros bidimensionais estudados no Capítulo 8, enquanto os últimos são uma extensão tridimensional dos elementos triangulares. Devem ainda referir-se os elementos pentaédricos, também designados por elementos do tipo cunha e os elementos do tipo pirâmide de base quadrangular, que na prática resultam de uma particularização dos hexaedros, após colapso dos seus nós originais. Estes elementos finitos são apresentados na Figura 9.2.

Uma das aplicações com maior potencial do método dos elementos finitos é a análise estrutural. Consequentemente, para que melhor se compreendam as variáveis e os graus de liberdade dos problemas que serão descritos neste capítulo considera-se, ao longo das próximas secções, que as incógnitas primárias são os deslocamentos nodais de cada elemento finito. Por outro lado, as incóg-

nitas secundárias são o campo de deformações, obtido após diferenciação do campo de deslocamentos, e o campo de tensões, que se determina após aplicação das leis constitutivas ou dos modelos de comportamento dos materiais. No entanto, é plausível a aplicação das expressões deduzidas a problemas de outras áreas de engenharia. Neste caso, devem aplicar-se as constantes e os parâmetros correspondentes ao fenómeno físico que se pretende estudar.

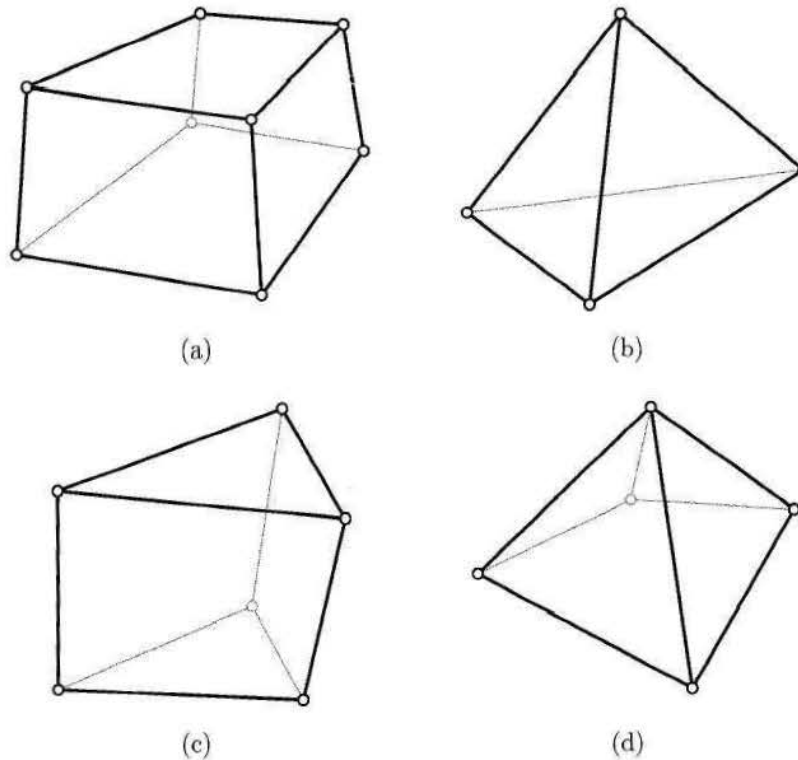


Figura 9.2 Tipos de elementos finitos tridimensionais: (a) hexaedro de oito nós, (b) tetraedro de quatro nós, (c) pentaedro de seis nós e (d) elemento do tipo pirâmide de base quadrangular.

À semelhança do que se passa no caso bidimensional, os tetraedros, quando comparados com os hexaedros, oferecem vantagens evidentes na fase de discretização, isto é, de construção da malha de elementos finitos, de problemas com geometria complexa ou ainda em procedimentos de remalhamento. Todavia, o elemento tetraédrico, tal como o seu parente bidimensional triangular, tem associadas algumas simplificações na descrição dos campos de deformações e de tensões. Consequentemente, o elemento tetraédrico tende a apresentar menor exactidão em problemas complexos, exigindo, consequentemente, malhas de ele-

mentos finitos mais refinadas. Por esta razão, os hexaedros são mais utilizados quando a preocupação principal é a obtenção de resultados fiáveis em problemas envolvendo cargas, condições de fronteira e materiais com propriedades mecânicas de definição complexa, ainda que à custa de mecanismos de geração de malhas mais elaborados.

Para um dado tipo de elemento finito, é possível variar o número de nós, tal como se mostra na Figura 9.3. A título de exemplo, podem considerar-se os elementos hexaédricos de baixa ordem (com oito nós), os quais exigem funções de interpolação de primeiro grau. Porém, também é possível construir elementos finitos hexaédricos com funções de forma de grau superior, tais como, por exemplo, o elemento finito de segunda ordem lagrangiano, com 27 nós, e o elemento finito serendipítico, com 20 nós, apresentados nas Figuras 9.3(b) e (c), respectivamente. A escolha de um ou outro tipo de elemento finito depende da aplicação concreta que se pretende estudar (mecânica das estruturas, mecânica dos fluidos, transmissão de calor, *etc.*) e do grau de exactidão pretendido para a aproximação da geometria real. Utilizando elementos finitos com mais nós por aresta torna-se possível, por exemplo, representar mais facilmente geometrias com linhas curvas.

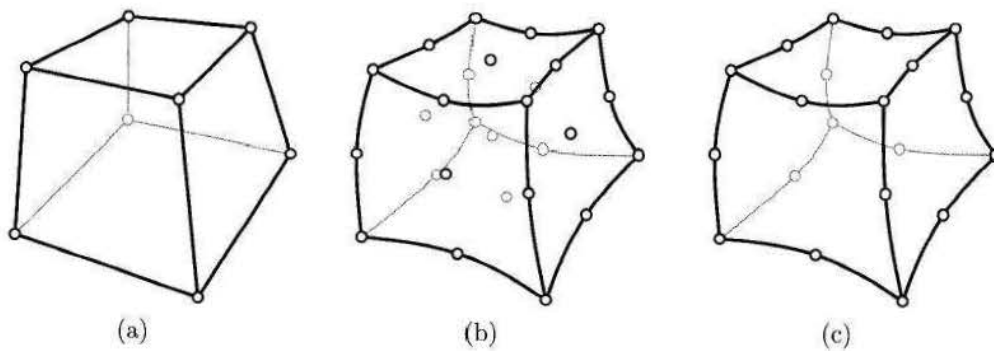


Figura 9.3 Representação esquemática de elementos finitos tridimensionais de diversas ordens: (a) hexaedro de primeira ordem, (b) hexaedro lagrangiano de segunda ordem e (c) hexaedro serendipítico de segunda ordem.

Finalmente, devem ainda referir-se outros tipos de elementos finitos tridimensionais que serão descritos e aprofundados no Capítulo 10. Trata-se dos elementos finitos do tipo placa ou do tipo casca, que devem ser utilizados em problemas em que a variação dos deslocamentos (ou da deformação) ao longo da espessura não é desprezável, não se podendo recorrer aos elementos bidimensionais. Tal acontece sempre que existam cargas normais ao plano da placa, como é o caso,

por exemplo, das solicitações de flexão associadas a geometrias com espessura reduzida. Este tipo de problemas pode também ser correctamente modelado recorrendo a um tipo particular de elemento hexaédrico tridimensional, designado por elemento do tipo sólido-casca. Este tipo de elemento finito encontra-se já incluído nas livrarias de elementos de alguns programas comerciais de simulação numérica pelo método dos elementos finitos.

9.2 Campo de deslocamentos

Nas secções que se seguem descrevem-se de forma detalhada os procedimentos através dos quais se determinam os campos de deslocamentos, tensões e deformações para os elementos tridimensionais mais vulgarmente utilizados no método dos elementos finitos, ou seja, os hexaedros de primeira e de segunda ordens, e os tetraedros de primeira e de segunda ordens.

9.2.1 Elementos finitos hexaédricos

A utilização de elementos hexaédricos para uma correcta modelação de problemas realistas com geometrias complexas exige, frequentemente, que se recorra à utilização de elementos finitos altamente distorcidos para conseguir uma discretização razoável do domínio contínuo a estudar. Neste contexto, a utilização de formulações isoparamétricas tridimensionais torna a análise por elementos finitos muito mais conveniente. À semelhança do caso bidimensional, uma transformação paramétrica designa-se isoparamétrica quando as funções interpoladoras do elemento finito coincidem com as funções de forma utilizadas na aproximação da função incógnita do problema de elementos finitos, o que ocorre frequentemente nas abordagens mais comuns do método dos elementos finitos.

Para além do referencial global do problema, conforme se viu nos Capítulos 7 e 8, deve criar-se um referencial local utilizando coordenadas normalizadas, tal como se mostra de forma esquemática na Figura 9.4. Sendo uma extensão dos elementos bidimensionais estudados no capítulo anterior, o domínio isoparamétrico em três dimensões inclui agora uma componente ζ (ver Figura 9.4), sendo definido por $\xi, \eta, \zeta \in [-1, 1]$.

Deste modo, o mesmo procedimento conducente ao cálculo da matriz de rigidez e do vector de forças pode ser utilizado sistematicamente para todos os elementos finitos de um modelo variando apenas as coordenadas nodais no re-

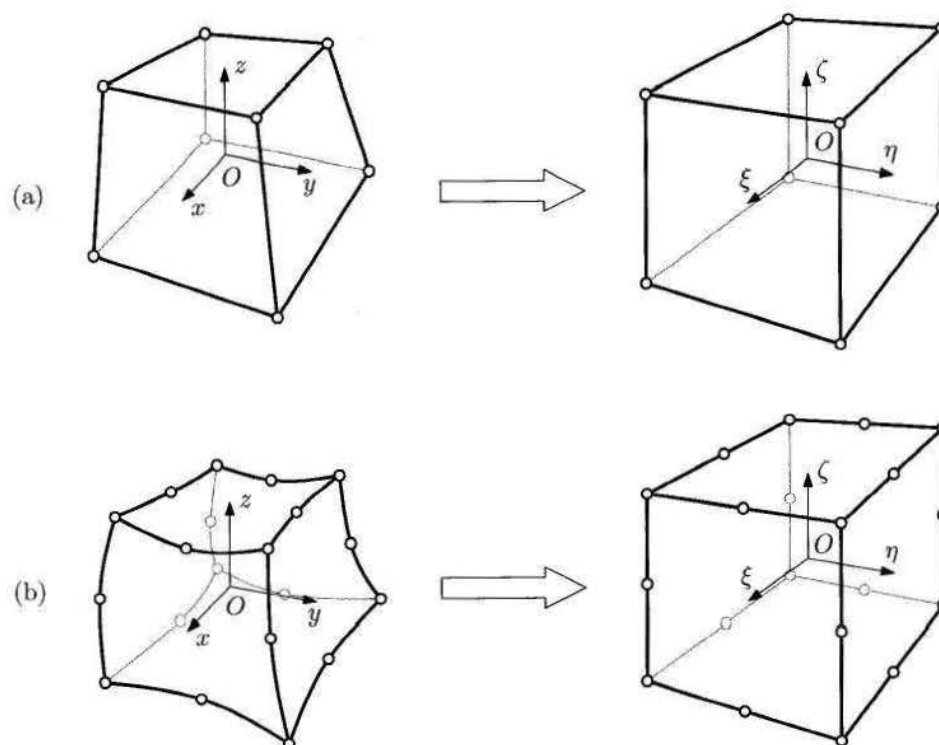


Figura 9.4 Mapeamento entre o domínio local (real) e o domínio local isoparamétrico: (a) elemento finito hexaédrico de primeira ordem e (b) elemento finito serendipítico de segunda ordem.

ferencial real global. Tal metodologia implica, obrigatoriamente, que se proceda do seguinte modo:

1. Definir as funções de forma no sistema de coordenadas naturais $O\xi\eta\zeta$;
2. Calcular as derivadas destas funções em ordem ao sistema de coordenadas reais $Oxyz$;
3. Efectuar o cálculo de todos os integrais no domínio isoparamétrico.

É possível transferir ou mapear qualquer quantidade calculada num dado referencial para o outro desde que a transformação seja matematicamente possível e, naturalmente, fisicamente aceitável. Para a transformação de coordenadas do referencial isoparamétrico $O\xi\eta\zeta$ para o referencial global cartesiano $Oxyz$ é necessário determinar as derivadas das funções de forma em ordem às componentes do referencial global, isto é, em ordem a x , a y e a z . O cálculo destas derivadas parciais é levado a cabo recorrendo à regra de derivação em cadeia, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{cases} \quad (9.1)$$

A expressão anterior pode ainda ser apresentada em forma matricial, obtendo-se

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix}, \quad (9.2)$$

em que $\mathbf{J}^{-1}$ corresponde à inversa da matriz de transformação jacobiana, sendo

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (9.3)$$

Por sua vez, a matriz jacobiana da transformação entre os referenciais isoparamétrico global e local é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (9.4)$$

Para a obtenção da matriz jacobiana é necessário recordar que as coordenadas (x, y, z) de um ponto do elemento finito se obtêm a partir da interpolação dos valores das coordenadas nodais x_i , y_i e z_i através das funções de forma N_i . Assim, pode determinar-se cada termo da matriz jacobiana, definida na relação 9.4, através da seguinte relação:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_{n_{\text{nos}}}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_{n_{\text{nos}}}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \cdots & \frac{\partial N_{n_{\text{nos}}}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n_{\text{nos}}} & y_{n_{\text{nos}}} & z_{n_{\text{nos}}} \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

ou ainda, de forma mais condensada, recorrendo à matriz

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix}. \quad (9.6)$$

Deste modo, o integral de uma função genérica $f(x, y, z)$ pode ser calculado no referencial natural recorrendo à seguinte expressão:

$$\iiint_{\Omega^e} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) (\det \mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta, \quad (9.7)$$

em que Ω^e representa o domínio do elemento finito no referencial global.

O procedimento agora apresentado é genérico e válido para elementos finitos hexaédricos de primeira ordem, de segunda ordem ou de ordem superior. Nas secções seguintes serão descritas e analisadas as funções de forma necessárias para a obtenção do campo de deslocamentos de cada um destes tipos de elemento finito. Todas as funções de forma serão calculadas em primeiro lugar no referencial natural.

Uma vez mais, considerando um ponto de um elemento finito no referencial local isoparamétrico, de coordenadas nodais (ξ, η, ζ) , as suas coordenadas no referencial global podem ser obtidas através da interpolação das coordenadas nodais elementares $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$, com $i = 1, \dots, n_{\text{nos}}$, utilizando funções de forma interpoladoras tridimensionais, ou seja,

$$\mathbf{x}_e = \sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} N_i(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{x}_i. \quad (9.8)$$

Estas funções interpoladoras dependerão, naturalmente, do tipo de hexaedro em causa. Para o elemento finito de oito nós, utilizam-se funções de forma trilineares, em tudo análogas às funções bilineares utilizadas para o elemento quadrilátero (bidimensional) de quatro nós. Considere-se a numeração dos oito nós do elemento hexaédrico apresentada na Figura 9.5, ou seja, da forma 1-2-3-4 e 5-6-7-8, isto é, no sentido contrário aos ponteiros do relógio. Assim, as funções $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta) \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta) \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta) \\ N_4(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta) \\ N_5(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta) \\ N_6(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta) \\ N_7(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta) \\ N_8(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta) \end{array} \right. \quad (9.9)$$

ou, ainda, de forma condensada e recorrendo a notação indicial, por

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i), \quad (9.10)$$

em que ξ_i , η_i e ζ_i são as coordenadas dos vectores ξ , η e ζ de dimensão $n_{\text{nos}} = 8$ contendo as coordenadas de cada nó no referencial isoparamétrico, ou seja,

$$\xi = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \eta = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \zeta = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (9.11)$$

As funções de forma definidas pela relação genérica 9.10 são funções trilineares e contêm quer os termos que constituem um polinómio completo de primeiro grau em ξ , η e ζ quer os termos $\xi\eta$, $\xi\zeta$, $\eta\zeta$ e $\xi\eta\zeta$. Como se poderá verificar, estes polinómios verificam ainda as seguintes condições:

$$N_i(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (9.12)$$

e

$$\sum_{i=1}^{n_{\text{nos}}} N_i(\xi, \eta, \zeta) = 1, \quad (9.13)$$

necessárias para que possam ser utilizados como funções de forma.

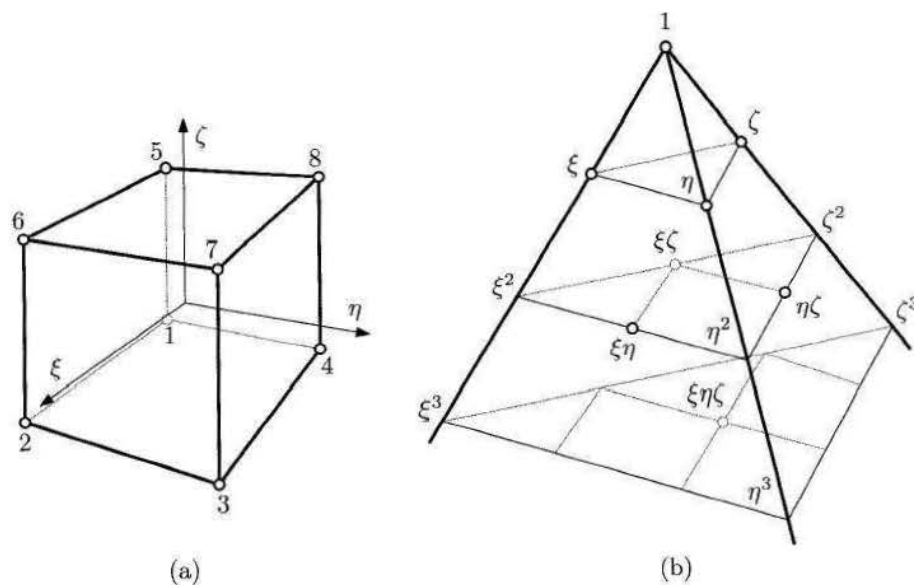


Figura 9.5 (a) Elemento finito hexaédrico de oito nós e (b) tetraedro de Pascal, com o qual se podem determinar as funções de forma para o elemento finito hexaédrico de oito nós.

No caso dos elementos finitos hexaédricos de ordem superior, serão necessárias funções interpoladoras de ordem superior. Estes elementos permitem modelar geometrias curvas recorrendo a discretizações com um menor número de elementos finitos, em comparação com a utilização de elementos de baixa ordem. Em contrapartida, dado o maior número de nós e o maior grau das funções de interpolação, estes elementos podem tornar-se mais dispendiosos em termos computacionais. Devem ser distinguidos dois tipos principais de elementos de ordem superior: (i) os elementos da família langrangiana (o de primeira ordem é o elemento de oito nós agora apresentado) e (ii) os elementos da família serendipítica, cujo elemento de primeira ordem coincide com o elemento lagrangiano.

O triângulo de Pascal, apresentado no Capítulo 8 e que para o caso tridimensional se torna no tetraedro de Pascal (ver Figura 9.5b), é uma ajuda útil na determinação dos termos presentes nas funções de forma dos elementos de ordem superior. As funções de forma do elemento lagrangiano de segunda or-

dem representado na Figura 9.6 e contendo 27 nós, podem ser construídas como uma combinação tridimensional das funções de forma lagrangianas de segunda ordem, definidas no Capítulo 8.

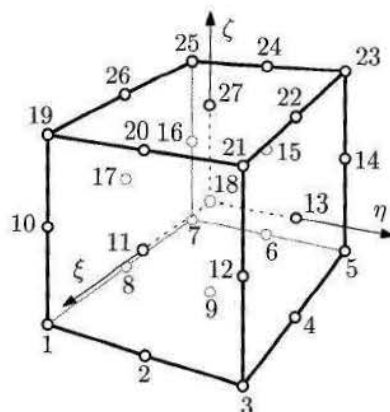


Figura 9.6 Elemento hexaédrico lagrangiano de segunda ordem, com 27 nós.

Consequentemente, as funções de forma para os nós dos vértices do elemento lagrangiano hexaédrico de 27 nós — $i = 1, 3, 5, 7, 19, 21, 23$ e 25 —, seguindo a numeração indicada na Figura 9.6, podem ser determinadas recorrendo à expressão genérica

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (\xi^2 + \xi\xi_i) (\eta^2 + \eta\eta_i) (\zeta^2 + \zeta\zeta_i). \quad (9.14)$$

Por outro lado, para os nós a meio das arestas — $i = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20, 22, 24$ e 26 — as funções de forma calculam-se com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} N_i(\xi, \eta, \zeta) = & \frac{1}{4} \eta_i^2 (\eta^2 - \eta\eta_i) \zeta_i^2 (\zeta^2 - \zeta\zeta_i) (1 - \xi^2) \\ & + \frac{1}{4} \zeta_i^2 (\zeta^2 - \zeta\zeta_i) \xi_i^2 (\xi^2 - \xi\xi_i) (1 - \eta^2) \\ & + \frac{1}{4} \xi_i^2 (\xi^2 - \xi\xi_i) \eta_i^2 (\eta^2 - \eta\eta_i) (1 - \zeta^2). \end{aligned} \quad (9.15)$$

Para os nós no centro das faces — $i = 9, 11, 13, 15, 17$ e 27 — as funções de forma são

$$\begin{aligned} N_i(\xi, \eta, \zeta) = & \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) (\zeta + \zeta^2 \zeta_i) \\ & + \frac{1}{2} (1 - \zeta^2) (1 - \eta^2) (\xi + \xi^2 \xi_i) \\ & + \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \zeta^2) (\eta + \eta^2 \eta_i). \end{aligned} \quad (9.16)$$

Por fim, para o nó central interior — $i = 18$ — a função de forma genérica é

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) (1 - \zeta^2). \quad (9.17)$$

Nas equações anteriores, os termos ξ_i , η_i e ζ_i correspondem às coordenadas do nó i no referencial natural.

Os elementos finitos da família lagrangiana com ordem superior à anterior são os hexaedros de terceira ordem — elemento finito cúbico —, com 64 nós, e o de quarta ordem — elemento finito quártico —, com 125 nós. Uma vez mais, as funções de forma em três dimensões podem ser obtidas por combinação das funções de forma da mesma ordem no caso unidimensional. Todavia, importa referir que estes elementos finitos possuem um elevado número de nós e, portanto, não são compatíveis com um bom desempenho computacional. Adicionalmente, quando comparados com os elementos serendipíticos, os elementos lagrangianos utilizam um maior número de nós para um mesmo grau de interpolação. No caso concreto do elemento finito hexaédrico de segunda ordem, o elemento serendipítico possui 20 nós, ou seja, menos sete do que o elemento correspondente da família lagrangiana. Esta diferença de sete nós resulta da ausência dos seis nós nos centros das faces do hexaedro e do nó no centro do hexaedro, como se pode verificar na Figura 9.7. Porém, ambos representam com a mesma exactidão polinómios de segunda ordem ao longo das suas arestas.

As funções de forma para estes elementos finitos podem ser determinadas após simples inspecção e combinação de termos lineares e quadráticos. No entanto, deverão ser construídas de modo a respeitar as condições definidas nas relações 9.12 e 9.13, utilizando a mesma metodologia adoptada para o elemento finito quadrilátero (bidimensional) de oito nós.

Seguindo a numeração indicada na Figura 9.7, as funções de forma para os nós dos vértices do elemento finito hexaédrico — $i = 1, 3, 5, 7, 13, 15, 17$ e 19 — são definidas pela relação genérica

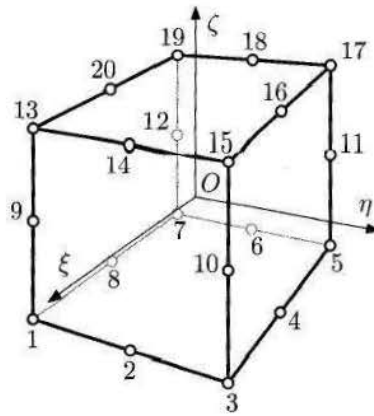


Figura 9.7 Elemento hexaédrico serendipítico de segunda ordem, com 20 nós.

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i + \zeta \zeta_i - 2), \quad (9.18)$$

enquanto que para os nós a meio das arestas perpendiculares ao plano $O\xi\zeta$ — $i = 2, 6, 14$ e 18 — se obtém o seguinte conjunto de funções:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i). \quad (9.19)$$

Por outro lado, as funções de forma para os nós a meio das arestas perpendiculares ao plano $O\eta\zeta$ — $i = 4, 8, 16$ e 20 — são

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} (1 - \eta^2) (1 + \xi \xi_i) (1 + \zeta \zeta_i), \quad (9.20)$$

enquanto que para os nós a meio das arestas, perpendiculares ao plano $O\xi\eta$ — $i = 9, 10, 11$ e 12 — se obtém

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} (1 - \zeta^2) (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i). \quad (9.21)$$

Assim, é possível verificar que as funções de forma agora descritas incluem um polinómio completo do segundo grau e termos resultantes da combinação entre termos lineares e quadráticos, isto é, os termos $\xi\eta^2$, $\xi^2\eta$, $\xi\zeta^2$, $\xi^2\zeta$, $\zeta\eta^2$, $\zeta^2\eta$, $\xi\eta\zeta$, $\xi^2\eta\zeta$, $\xi\eta^2\zeta$ e $\xi\eta\zeta^2$. O número de graus de liberdade total é, portanto, $20 \times 3 = 60$, menos 21 do que para o elemento quadrático lagrangiano ($27 \times 3 = 81$).

Finalmente, é ainda possível referir-se os elementos finitos serendipíticos de terceira ordem, com 32 nós, e o lagrangiano de terceira ordem, com 64 nós.

Todavia, estas formulações de ordem mais elevada são pouco utilizadas devido ao seu grande peso computacional.

O campo de deslocamentos $\mathbf{u}$ num qualquer ponto de um dos elementos finitos descritos nos parágrafos anteriores (de primeira ordem, segunda ordem ou ordem superior) é função do valor dos deslocamentos nos nós $\mathbf{d}^e = \{u_i, v_i, w_i\}$, com $i = 1, \dots, n_{\text{nos}}$, e pode, consequentemente, ser aproximado por $\mathbf{u}^h$, ou seja,

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^h = \mathbf{N}\mathbf{d}^e, \quad (9.22)$$

em que $\mathbf{N}$ é a matriz das funções de forma, que, no caso presente, pode ser definida por

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_{n_{\text{nos}}}], \quad (9.23)$$

sendo

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix}, \quad (9.24)$$

com $i = 1, \dots, n_{\text{nos}}$. O vector de deslocamentos elementares pode ser definido como

$$\mathbf{d}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \vdots \\ u_{n_{\text{nos}}} \\ v_{n_{\text{nos}}} \\ w_{n_{\text{nos}}} \end{Bmatrix}. \quad (9.25)$$

A dimensão do vector de deslocamentos $\mathbf{d}^e$ e o número de colunas da matriz $\mathbf{N}$ são sempre iguais ao número de graus de liberdade de cada nó do elemento finito (três translações) multiplicado pelo número de nós do elemento. Assim, o elemento finito hexaédrico de oito nós tem $8 \times 3 = 24$ graus de liberdade e o elemento finito hexaédrico serendipítico de 20 nós tem $20 \times 3 = 60$ graus de liberdade, conforme mencionado anteriormente.

9.2.2 Elementos finitos tetraédricos

O elemento finito tetraédrico mais simples é o elemento linear de quatro nós e 12 graus de liberdade, representado esquematicamente na Figura 9.8. Para a derivação das suas funções de forma, torna-se útil, à semelhança do procedimento utilizado com os elementos bidimensionais triangulares, recorrer à utilização de coordenadas de volume, uma extensão do conceito de coordenadas de área.

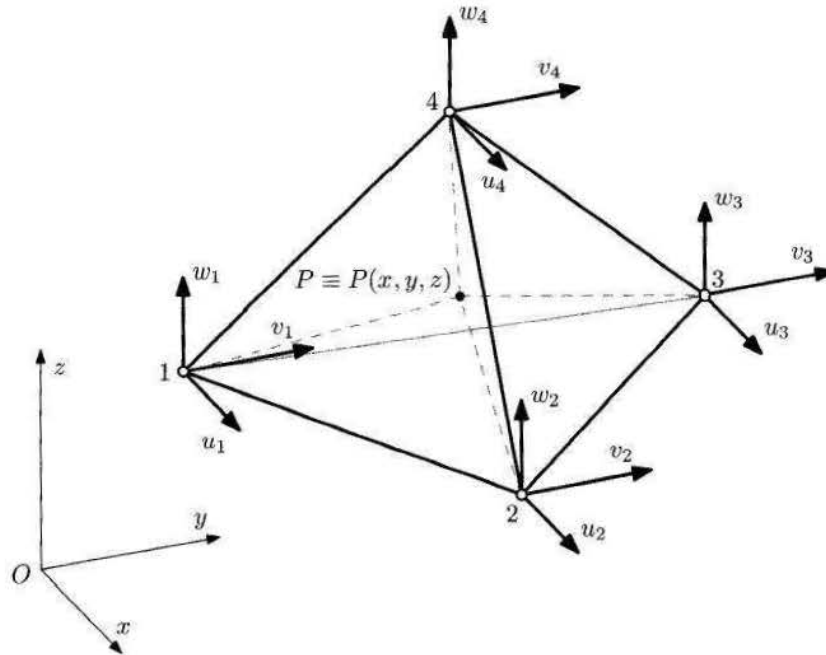


Figura 9.8 Representação esquemática do elemento finito tetraédrico de primeira ordem, com quatro nós, e respectivos graus de liberdade.

Considerando um ponto $P \equiv P(x, y, z)$ situado no volume definido pelos quatro vértices do elemento finito tetraédrico representado na Figura 9.8, podem definir-se os seguintes quocientes volumétricos:

$$L_1 = \frac{V_{P234}}{V_{1234}}, \quad L_2 = \frac{V_{P134}}{V_{1234}}, \quad L_3 = \frac{V_{P124}}{V_{1234}}, \quad L_4 = \frac{V_{P123}}{V_{1234}}, \quad (9.26)$$

ou, de forma mais compacta,

$$L_i = \frac{V_i^*}{V_{1234}} = \frac{V_i^*}{V^e}, \quad (9.27)$$

em que V_i^* é o volume do tetraedro formado pelo ponto P e pela face do elemento oposta ao nó i , e V^e é o volume total do elemento finito. A partir da expressão 9.27 facilmente se verifica que

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = \sum_{i=1}^4 L_i = 1. \quad (9.28)$$

As coordenadas cartesianas x , y e z podem, naturalmente, ser interpoladas através das coordenadas de volume, isto é,

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^4 L_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^4 L_i y_i \\ z = \sum_{i=1}^4 L_i z_i \end{cases} \quad (9.29)$$

Combinando as equações anteriores com a relação 9.28 torna-se possível estabelecer a seguinte relação matricial:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix}. \quad (9.30)$$

A inversão da matriz de coordenadas definida na expressão anterior permite, sempre que a matriz não seja singular, obter as coordenadas de volume L_i a partir das coordenadas cartesianas (x, y, z) , ou seja,

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad (9.31)$$

em que o volume do elemento finito pode ser determinado da seguinte forma:

$$V^e = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}. \quad (9.32)$$

Por outro lado, os coeficientes a_i , b_i , c_i e d_i podem obter-se a partir dos determinantes

$$\begin{aligned} a_i &= (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}, & b_i &= (-1)^{i+2} \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}, \\ c_i &= (-1)^{i+3} \begin{vmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \\ 1 & x_l & z_l \end{vmatrix} & \text{e } d_i &= (-1)^{i+4} \begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Os coeficientes i , j , k e l são obtidos por permutação cíclica, ou seja, recorrendo a um esquema idêntico ao que se mostra na Figura 8.4, isto é, se $i = 1$, então $j = 2$, $k = 3$ e $l = 4$; se $i = 2$, então $j = 3$, $k = 4$ e $l = 1$; *etc.* Como corolário das considerações anteriores (ver equações 9.26 a 9.31) é possível estabelecer que as funções de forma N_i coincidem com as coordenadas de volume L_i , ou seja,

$$N_i = L_i = \frac{1}{6V^e} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z). \quad (9.34)$$

Ao mesmo tempo, a matriz $\mathbf{B}$ das derivadas das funções de forma, definida anteriormente na equação 6.94 como

$$\mathbf{B}_i^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (9.35)$$

com $i = 1, \dots, n_{\text{nos}}$, pode ser reescrita em função dos parâmetros a_i , b_i , c_i e d_i como

$$\mathbf{B}_i^e = \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ d_i & 0 & b_i \\ 0 & d_i & c_i \end{bmatrix}, \quad (9.36)$$

com $i = 1, \dots, n_{\text{nos}}$, resultando numa matriz com seis linhas — o número de componentes do vector das deformações — e 12 colunas — o número de deslocamentos nodais (ou graus de liberdade) do tetraedro de quatro nós.

Os tetraedros de segunda e de terceira ordem possuem a vantagem evidente de permitirem modelar geometrias curvas, ao contrário dos tetraedros de primeira ordem, que possuem lados sempre rectos. O número total de graus de liberdade do elemento finito tetraédrico de segunda ordem é $10 \times 3 = 30$, como se pode verificar na Figura 9.9(a). Já o elemento finito tetraédrico de terceira ordem, representado na Figura 9.9(b), tem $20 \times 3 = 60$ graus de liberdade. Todavia, o tetraedro de terceira ordem é pouco utilizado devido ao seu elevado custo computacional, sendo o seu uso frequentemente preterido em favor do de elementos de primeira ou de segunda ordens, utilizando-se um maior refinamento de malha.

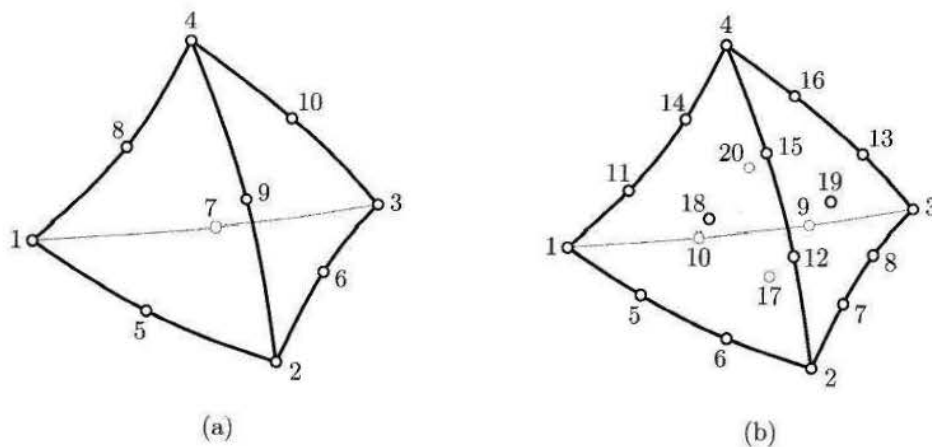


Figura 9.9 Representação esquemática dos elementos finitos tetraédricos (a) de segunda ordem e (b) de terceira ordem.

As funções de forma podem ser determinadas através das coordenadas de volume L_i descritas nas relações 9.26 respeitando sempre as condições 9.12 e 9.13. Assim, seguindo a numeração indicada na Figura 9.9, pode estabelecer-se para os nós dos vértices do tetraedro de segunda ordem (de 10 nós) que

$$N_i = (2L_i - 1) L_i, \quad (9.37)$$

com $i = 1, \dots, 4$. Por outro lado, para os nós a meio das arestas obtém-se

$$\begin{cases} N_5 = 4L_1L_2 \\ N_6 = 4L_2L_3 \\ N_7 = 4L_1L_3 \\ N_8 = 4L_1L_4 \\ N_9 = 4L_2L_4 \\ N_{10} = 4L_3L_4 \end{cases} \quad (9.38)$$

Finalmente, deve referir-se a importância da utilização de coordenadas de volume no cálculo de integrais em todo o domínio do elemento finito tetraédrico. Consequentemente, para uma função genérica $f(x, y, z)$ obtém-se

$$\iiint_{\Omega^e} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} f(L_1, L_2, L_3) (\det \mathbf{J}) dL_1 dL_2 dL_3, \quad (9.39)$$

em que $\mathbf{J}$ é a matriz jacobiana da transformação do sistema de coordenadas de volume para o sistema de coordenadas cartesianas. Atenda-se ainda ao facto de, de acordo com a relação 9.28, f não depender funcionalmente de L_4 para os limites de integração adoptados.

9.3 Campo de deformações

Uma vez conhecido o campo de deslocamentos de um elemento finito, podem determinar-se as componentes do campo das deformações para os elementos tetraédricos seguindo a mesma metodologia que foi descrita para os elementos finitos hexaédricos. Esta abordagem pode ser aplicada a elementos quer de baixa ordem quer de ordem superior.

As componentes do campo das deformações num ponto do elemento finito podem ser agrupadas vectorialmente do seguinte modo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (9.40)$$

Estas componentes de deformação elementar podem relacionar-se com o campo de deslocamentos nodais através do operador $\mathbf{B}$, ou seja,

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{n_{\text{nos}}}], \quad (9.41)$$

sendo

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}^e, \quad (9.42)$$

com

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (9.43)$$

em que $i = 1, \dots, n_{\text{nos}}$. Uma vez mais, a matriz $\mathbf{B}$ tem seis linhas, correspondentes às seis componentes do vector das deformações, e um número de colunas igual ao número de nós multiplicado pelos três graus de liberdade por nó.

9.4 Campo de tensões

No domínio das deformações lineares elásticas, a relação entre tensões e deformações num ponto do corpo material pode ser definida pela lei de Hooke. O desenvolvimento de deformações plásticas constitui um caso de análise não-linear, a ser abordado detalhadamente no Capítulo 12 desta obra.

No caso tridimensional, o vector das deformações (ver equação 9.40) e o vector das componentes cartesianas das tensões, que pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (9.44)$$

podem relacionar-se através da matriz constitutiva $\mathbf{D}$, tal como referido na Secção 6.4. No caso mais geral, considerando o regime linear elástico, a relação entre tensões e deformações corresponde a

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (9.45)$$

ou, em notação indicial,

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (9.46)$$

em que $\mathbf{D}$ é o tensor de elasticidade, que no caso tridimensional corresponde a um tensor de quarta ordem que possui 81 componentes independentes (ver Capítulo 3). Porém, atendendo à simetria dos tensores das tensões e das deformações, tem-se que

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \end{cases}, \quad (9.47)$$

sendo conseqüentemente possível concluir que os coeficientes independentes que compõem $\mathbf{D}$ são apenas 36. Adicionalmente, considere-se um domínio tridimensional cujo material possa ser considerado isotrópico, isto é, cujas propriedades mecânicas sejam iguais em todas as direcções. Sejam σ_1 , σ_2 e σ_3 as tensões principais e ε_1 , ε_2 e ε_3 as deformações principais correspondentes. Se o sistema de eixos coordenados coincidir com as direcções principais, então pode afirmar-se que

$$\begin{cases} \sigma_1 = D_{1111} \varepsilon_1 \\ \sigma_2 = D_{2222} \varepsilon_2 \\ \sigma_3 = D_{3333} \varepsilon_3 \end{cases}. \quad (9.48)$$

Todavia, a condição de isotropia material implica que a deformação ε_1 , causada por uma tensão σ_1 , ocorra na mesma proporção que ε_2 devida a σ_2 e que ε_3 devida a σ_3 . Assim, conclui-se que

$$D_{1111} = D_{2222} = D_{3333}. \quad (9.49)$$

Como consequência adicional da isotropia material, as componentes de deformação ε_2 e ε_3 resultantes da componente de tensão σ_1 devem ser iguais. Adicionalmente, aplicando o mesmo raciocínio para σ_2 e σ_3 , obtém-se

$$\begin{cases} D_{1122} = D_{1133} \\ D_{1122} = D_{2233} \\ D_{1133} = D_{2233} \end{cases} \quad (9.50)$$

e, por simetria, determina-se que

$$D_{1122} = D_{2211} = D_{1133} = D_{3311} = D_{2233} = D_{3322}. \quad (9.51)$$

Assim, para estados tridimensionais de tensão e de deformação, a relação entre as componentes de tensão e de deformação corresponde, tal como referido na Secção 6.4, a

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (9.52)$$

em que os termos independentes da matriz constitutiva podem ser calculados em função dos parâmetros do material, isto é, do módulo de Young E e do coeficiente de Poisson ν , ou seja,

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}. \quad (9.53)$$

9.5 Vector de forças e matriz de rigidez

As expressões para o cálculo da matriz de rigidez e do vector de forças de cada elemento finito foram deduzidas na Secção 6.4, correspondendo a

$$\begin{cases} \mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e d\Omega \\ \mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t^e} (\mathbf{N}_{\Gamma_t}^e)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{cases} \quad (9.54)$$

No caso dos elementos finitos hexaédricos, os integrais da equação anterior podem ser calculados no domínio isoparamétrico, conforme a equação 9.7, obtendo-se a expressão

$$\mathbf{k}_{ij}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\mathbf{B}_i)^T (\xi, \eta, \zeta) \mathbf{D} \mathbf{B}_j (\xi, \eta, \zeta) (\det \mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta, \quad (9.55)$$

em que os índices i e j dizem respeito à submatriz de rigidez para posterior assemblagem. Os procedimentos de assemblagem para a matriz de rigidez global e o vector de forças global foram já descritos detalhadamente no Capítulo 4. A matriz de rigidez global resultante tem uma dimensão $(3 \times n_{\text{nos}}) \times (3 \times n_{\text{nos}})$, constituída por $(n_{\text{nos}})^2$ sub-blocos $\mathbf{k}_{ij}^e$. A título de exemplo, para o hexaedro de oito nós obtém-se uma matriz de dimensão 24×24 contendo 8^2 sub-blocos $\mathbf{k}_{ij}^e$ na seguinte forma genérica:

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^e & \mathbf{k}_{12}^e & \dots & \mathbf{k}_{18}^e \\ \mathbf{k}_{21}^e & \mathbf{k}_{22}^e & \dots & \mathbf{k}_{28}^e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{k}_{81}^e & \mathbf{k}_{82}^e & \dots & \mathbf{k}_{88}^e \end{bmatrix}. \quad (9.56)$$

Para a componente do vector de forças devida a carregamentos volúmicos, obtém-se

$$\mathbf{f}_{\Omega i}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\mathbf{N}_i)^T (\xi, \eta, \zeta) \mathbf{b} (\det \mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta. \quad (9.57)$$

Na equação anterior consideram-se apenas os carregamentos provocados pela carga volúmica $\mathbf{b}$. Para considerar o efeito de forças de tracção é necessário efectuar alguns passos adicionais, uma vez que o efeito destas cargas depende da face do hexaedro na qual são aplicadas. Para tal, defina-se em primeiro lugar o vector normal a cada face do hexaedro. Existem três direcções possíveis, que

são obtidas efectuando produtos vectoriais entre as direcções tangentes aos eixos naturais ξ , η e ζ , isto é,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi} \right\}^T \\ \mathbf{v}_2 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta} \right\}^T \\ \mathbf{v}_3 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial \zeta}, \frac{\partial y}{\partial \zeta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right\}^T \end{cases} \quad (9.58)$$

Na prática, os vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ correspondem precisamente às linhas da matriz jacobiana definida na relação 9.4. Assim, as direcções normais às faces do hexaedro são definidas como

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3\|} \\ \mathbf{n}_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1\|} \\ \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \end{cases} \quad (9.59)$$

Dependendo da face em causa do elemento finito hexaédrico deverá escolher-se o vector normal correspondente — $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ ou $\mathbf{n}_3$ —, assim como o carregamento $\bar{\mathbf{t}}$ a aplicar, que será definido como

$$\bar{\mathbf{t}} = \bar{t}\mathbf{n}. \quad (9.60)$$

Por conseguinte, o vector de forças nodais correspondente pode ser calculado de acordo com uma das seguintes três opções, consoante a direcção perpendicular à face solicitada:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\Gamma_{ti}}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\mathbf{N}_i)^T (\xi, \eta, \zeta) \bar{t}_1 \mathbf{n}_1 d\xi d\eta \leftarrow \text{Direcção } O\xi \\ \mathbf{f}_{\Gamma_{ti}}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\mathbf{N}_i)^T (\xi, \eta, \zeta) \bar{t}_2 \mathbf{n}_2 d\xi d\zeta \leftarrow \text{Direcção } O\eta \\ \mathbf{f}_{\Gamma_{ti}}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\mathbf{N}_i)^T (\xi, \eta, \zeta) \bar{t}_3 \mathbf{n}_3 d\eta d\zeta \leftarrow \text{Direcção } O\zeta \end{cases} \quad (9.61)$$

Para os elementos finitos tetraédricos lineares de quatro nós, o cálculo da matriz de rigidez revela-se significativamente mais simples. Recorrendo à equa-

ção 9.39 e atendendo a que o campo de deformações no domínio do tetraedro linear de quatro nós é constante, todos os termos do integrando na equação para o cálculo da matriz de rigidez (ver equação 9.54) são constantes. Deste modo, obtém-se uma expressão que não necessita de ser integrada numericamente¹, isto é,

$$\mathbf{k}_{ij}^e = (\mathbf{B}_i^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j^e V^e. \quad (9.62)$$

O cálculo do vector de forças devido a carregamentos volúmicos pode, à semelhança do que se efectuou para a matriz de rigidez elementar, ser calculado directamente, uma vez que os termos do integrando são constantes, obtendo-se

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\Omega i}^e &= \int_{\Omega^e} (\mathbf{N})_i^T \mathbf{b} d\Omega \\ &= \frac{V^e}{4} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (9.63)$$

O cálculo dos carregamentos de superfície dependerá também da face do elemento finito em que é aplicada a carga. Se o domínio Γ^e corresponder à area da face na qual a carga está aplicada, então a expressão

$$\mathbf{f}_{\Gamma i}^e = \int_{\Gamma^e} (\mathbf{N}_{\Gamma i}^e)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (9.64)$$

poderá assumir quatro configurações distintas consoante a face de aplicação:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\Gamma i}^e = \frac{\Gamma_{123}^e}{3} \{ \bar{t}_x \bar{t}_y \bar{t}_z \bar{t}_x \bar{t}_y \bar{t}_z \bar{t}_x \bar{t}_y \bar{t}_z 0 0 0 \}^T \leftarrow \text{Face com nós 1, 2 e 3} \\ \mathbf{f}_{\Gamma i}^e = \frac{\Gamma_{124}^e}{3} \{ \bar{t}_x \bar{t}_y \bar{t}_z \bar{t}_x \bar{t}_y \bar{t}_z 0 0 0 \bar{t}_x \bar{t}_y \bar{t}_z \}^T \leftarrow \text{Face com nós 1, 2 e 4} \\ \mathbf{f}_{\Gamma i}^e = \frac{\Gamma_{134}^e}{3} \{ \bar{t}_x \bar{t}_y \bar{t}_z 0 0 0 \bar{t}_x \bar{t}_y \bar{t}_z \bar{t}_x \bar{t}_y \bar{t}_z \}^T \leftarrow \text{Face com nós 1, 3 e 4} \\ \mathbf{f}_{\Gamma i}^e = \frac{\Gamma_{234}^e}{3} \{ 0 0 0 \bar{t}_x \bar{t}_y \bar{t}_z \bar{t}_x \bar{t}_y \bar{t}_z \bar{t}_x \bar{t}_y \bar{t}_z \}^T \leftarrow \text{Face com nós 2, 3 e 4} \end{cases} \quad (9.65)$$

Exercício 9.1. Considere que o elemento finito tetraédrico linear de quatro nós representado na Figura 9.10 é submetido a uma solicitação de

¹ Este ponto será abordado em detalhe na Secção 9.6.

tracção $\bar{t} = (0, 0, -10^{-6})$ na face definida pelos nós 1, 2 e 3. Calcule a matriz de rigidez do elemento e o vector de forças correspondente. As coordenadas dos nós do elemento finito são as que se indicam na tabela seguinte.

Nó	Coordenada x	Coordenada y	Coordenada z
1	0	0	0
2	5	0	0
3	0	5	0
4	2,5	2,5	4

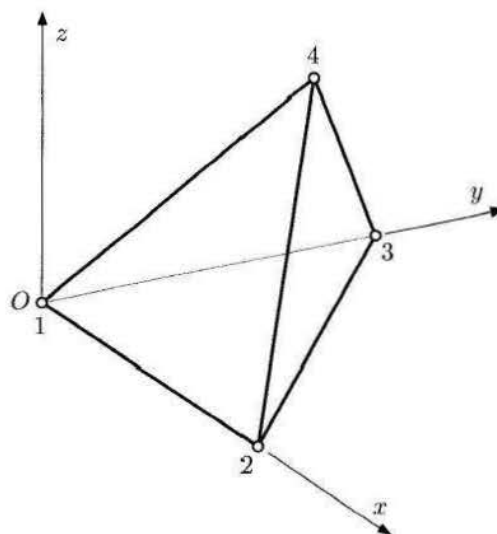


Figura 9.10 Elemento finito tetraédrico linear, para o Exercício 9.1.

Resolução

A primeira tarefa é determinar o volume do elemento finito de acordo com a relação 9.32, obtendo-se o seguinte resultado:

$$V_e = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2,5 & 2,5 & 4 \end{vmatrix} = 16,67.$$

Os coeficientes a_i , b_i , c_i e d_i , com $i = 1, \dots, 4$, podem ser calculados recorrendo às relações 9.33, ou seja,

$$a_1 = (-1)^2 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2,5 & 2,5 & 4 \end{vmatrix} = 100,$$

$$b_1 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2,5 & 4 \end{vmatrix} = -20,$$

$$c_1 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2,5 & 4 \end{vmatrix} = -20$$

e

$$d_1 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2,5 & 2,5 \end{vmatrix} = 0.$$

Aplicando o raciocínio utilizado no cálculo de a_1 , b_1 , c_1 e d_1 aos restantes coeficientes, chega-se a

$$\begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12,5 \\ -12,5 \\ 25 \end{Bmatrix}.$$

Uma vez determinados os coeficientes a_i , b_i , c_i e d_i , torna-se possível obter as matrizes $\mathbf{B}_i$ para os quatro nós do elemento ($i = 1, \dots, 4$). Aplicando a relação 9.36 pode determinar-se que a matriz das derivadas das funções de forma do elemento $\mathbf{B}^e$ é a seguinte:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 | \mathbf{B}_2 | \mathbf{B}_3 | \mathbf{B}_4] =$$

$$= \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 \\ c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & b_3 & 0 & c_4 & b_4 & 0 \\ d_1 & 0 & b_1 & d_2 & 0 & b_2 & d_3 & 0 & b_3 & d_4 & 0 & b_4 \\ 0 & d_1 & c_1 & 0 & d_2 & c_2 & 0 & d_3 & c_3 & 0 & d_4 & c_4 \end{bmatrix}.$$

Após substituição dos valores numéricos a matriz $\mathbf{B}$ é

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12,5 & 0 & 0 & -12,5 & 0 & 0 & 25 \\ -20 & -20 & 0 & 0 & 20 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & -12,5 & 0 & 20 & -12,5 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 0 & -12,5 & 0 & 0 & -12,5 & 20 & 0 & 25 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como se pode verificar, todos os termos da matriz $\mathbf{B}$ são constantes. Por conseguinte, o cálculo da matriz de rigidez dispensa o uso de integração numérica, conforme foi já referido. A matriz de rigidez do elemento finito é, então,

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} V^e.$$

A matriz constitutiva $\mathbf{D}$, definida anteriormente na equação 9.53, pode ser calculada considerando um coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e um módulo de Young $E = 210000$. As unidades das dimensões e das propriedades mecânicas são omitidas havendo, porém, coerência nas grandezas escolhidas. Após substituição dos valores numéricos, a matriz constitutiva é

$$\mathbf{D} = 1 \times 10^4 \begin{bmatrix} 28,3 & 12,1 & 12,1 & 0 & 0 & 0 \\ 12,1 & 28,3 & 12,1 & 0 & 0 & 0 \\ 12,1 & 12,1 & 28,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8,1 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, fazendo o produto $\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$ e multiplicando pelo volume do elemento V^e , obtém-se a matriz de rigidez do elemento com dimensão 12×12 :

$$\mathbf{k}^e = 1 \times 10^8 \begin{bmatrix} 24,2 & 13,5 & 0 & -18,8 & -5,4 & 5,0 \\ 13,5 & 24,2 & 0 & -8,1 & -5,4 & 5,0 \\ 0 & 0 & 10,8 & 3,4 & 3,4 & -5,4 \\ -18,8 & -8,1 & 3,4 & 21,0 & 0 & -8,4 \\ -5,4 & -5,4 & 3,4 & 0 & 7,5 & 0 \\ 5,0 & 5,0 & -5,4 & -8,4 & 0 & 12,7 \\ -5,4 & -5,4 & 3,4 & 2,1 & 5,4 & -3,4 \\ -8,1 & -18,8 & 3,4 & 8,1 & 2,1 & -5,0 \\ 5,0 & 5,0 & -5,4 & -5,0 & -3,4 & 7,4 \\ 0 & 0 & -6,7 & -4,2 & 0 & 6,7 \\ 0 & 0 & -6,7 & 0 & -4,2 & 0 \\ -10,1 & -10,1 & 0 & 10,1 & 0 & -14,7 \\ -5,4 & -8,1 & 5,0 & 0 & 0 & -10,1 \\ -5,4 & -18,8 & 5,0 & 0 & 0 & -10,1 \\ 3,4 & 3,4 & -5,4 & -6,7 & -6,7 & 0 \\ 2,1 & 8,1 & -5,0 & -4,2 & 0 & 10,1 \\ 5,4 & 2,1 & -3,4 & 0 & -4,2 & 0 \\ -3,4 & -5,0 & 7,4 & 6,7 & 0 & -14,7 \\ 7,5 & 0 & 0 & -4,2 & 0 & 0 \\ 0 & 21,0 & -8,4 & 0 & -4,2 & 10,1 \\ 0 & -8,4 & 12,7 & 0 & 6,7 & -14,7 \\ -4,2 & 0 & 0 & 8,4 & 0 & 0 \\ 0 & -4,2 & 6,7 & 0 & 8,4 & 0 \\ 0 & 10,1 & -14,7 & 0 & 0 & 29,4 \end{bmatrix} \oplus$$

O vector de forças nodais pode ser determinado após aplicação directa das expressões 9.65, atendendo a que a área da face 123 do elemento finito é

$$A_{123} = \frac{5 \times 5}{2} = 12,5$$

e uma vez que são conhecidas as componentes cartesianas da tracção, isto é, $\bar{\mathbf{t}} = (0, 0, -10^{-6})$, resulta, atendendo à equação 9.60, que

$$\mathbf{f}_{\Gamma i}^e = 4,17 \{0 \ 0 \ 10^{-6} \ 0 \ 0 \ 10^{-6} \ 0 \ 0 \ 10^{-6} \ 0 \ 0 \ 0\}^T.$$

9.6 Integração Numérica

Na secção que se segue, mostra-se como os integrais analíticos das equações referentes à matriz de rigidez e ao vector de forças podem ser determinados numericamente recorrendo a aproximações numéricas com pesos e pontos de integração do método de Gauss-Legendre, numa generalização da abordagem apresentada nos Capítulos 7 e 8.

9.6.1 Elementos finitos hexaédricos

A complexidade dos termos integrantes nas equações conducentes ao cálculo da matriz de rigidez e do vector de forças torna o cálculo analítico sistemático de tais integrais virtualmente impossível para domínios genéricos, obrigando a que se recorra à utilização de métodos numéricos para o cálculo dos respectivos integrais. De uma forma geral, à semelhança do que acontece em uma e em duas dimensões, os integrais em domínios tridimensionais podem ser aproximados efectuando uma soma de termos constituídos pelos valores da função integranda num certo número discreto de pontos predefinidos, multiplicados por pesos convenientes. Assim, para o caso de elementos hexaédricos obtém-se

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega^e} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) (\det \mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta \\ &\approx \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{k=1}^{n_k} [w_i w_j w_k f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\det \mathbf{J}_{i,j,k})], \quad (9.66) \end{aligned}$$

em que f é a função integranda, e n_i , n_j e n_k designam o número de pontos de integração em cada uma das direcções do referencial $O\xi\eta\zeta$. Por uma questão de conveniência, repete-se na Tabela 9.1 a posição dos pontos de integração de Gauss e respectivos pesos. Esta tabela distingue-se da Tabela 7.1 pelo facto de a posição de cada ponto se repetir em cada uma das direcções do sistema de eixos $O\xi\eta\zeta$. O número de pontos de integração a utilizar condiciona o grau máximo do polinómio a ser integrado, ou, por outras palavras, quanto maior o grau do polinómio a integrar, maior deverá ser o número de pontos de integração a utilizar. Por exemplo, para o elemento finito hexaédrico de primeira ordem, isto é, com oito nós, dever-se-ão utilizar pelo menos dois pontos de integração em cada direcção.

Tabela 9.1 Coordenadas (ξ_i, η_i, ζ_i) e pesos de integração w_i, w_j , e w_k para as sete primeiras ordens de integração (n) da quadratura de Gauss-Legendre.

n	ξ_i, η_i, ζ_i	w_i, w_j, w_k
1	0	2
2	$\pm 0,577350269$	1
3	$\pm 0,774596669$	0,55556
	0	0,88889
4	$\pm 0,861136312$	0,34785
	$\pm 0,339981044$	0,65215
5	$\pm 0,906179846$	0,23693
	$\pm 0,538469320$	0,47863
	0	0,56889
6	$\pm 0,932469514$	0,17132
	$\pm 0,661209386$	0,36076
	$\pm 0,238619186$	0,46791
7	$\pm 0,949107912$	0,12948
	$\pm 0,741531186$	0,27971
	$\pm 0,405845151$	0,38183
	0	0,41796

Elementos finitos com ordens de integração superiores exigirão, naturalmente, mais pontos de integração. Tal como foi mencionado no Capítulo 8, para domínios bidimensionais, a utilização de elementos finitos subintegrados, isto é, com ordens de integração inferior à teoricamente exacta, é bastante comum. Tal é, por exemplo, o caso do elemento finito hexaédrico de oito nós com integração reduzida, representado na Figura 9.11. No contexto das formulações tridimensionais, a utilização de técnicas de integração reduzida tem por objectivo melhorar o desempenho dos elementos finitos quando se pretende modelar o comportamento de materiais incompressíveis ou na presença de solicitações de flexão pura.

9.6.2 Elementos finitos tetraédricos

Retomando a equação 9.39, o cálculo numérico dos integrais em domínios tetraédricos pode ser efectuado recorrendo à expressão

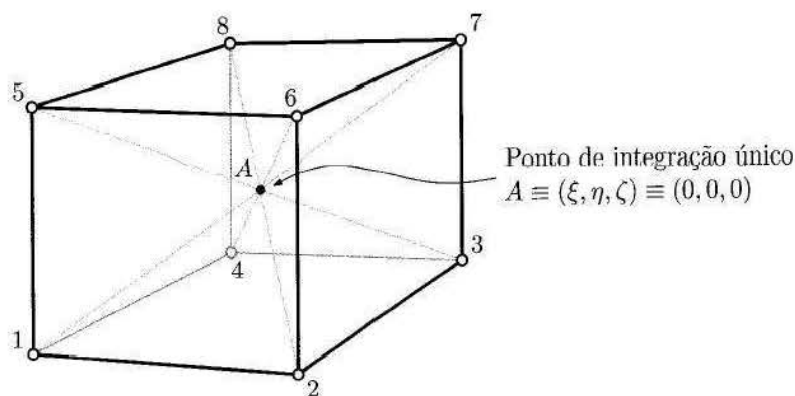


Figura 9.11 Elemento finito hexaédrico de oito nós com integração reduzida.

$$\int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} f(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 dL_3 = \sum_{i=1}^{n_p} f(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}) w_i, \quad (9.67)$$

em que as posições L_{1i} , L_{2i} e L_{3i} , e os pesos w_i são os que se indicam na Tabela 9.2 e estão representados na Figura 9.12. Atenda-se ao facto de, de acordo com a equação 9.28, f não depender funcionalmente de L_4 para os limites de integração adoptados.

Tabela 9.2 Pesos e posições dos pontos de integração utilizados nas quadraturas gaussianas de ordem linear e de ordem quadrática, para elementos finitos tetraédricos ($a = 0,58541020$ e $b = 0,13819660$).

Ordem	n_p	Ponto	L_{1i}	L_{2i}	L_{3i}	L_{4i}	w_i
Linear	1	A	1/4	1/4	1/4	1/4	1/6
Quadrática	4	A	a	b	b	b	1/24
		B	b	a	b	b	1/24
		C	b	b	a	b	1/24
		D	b	b	b	a	1/24

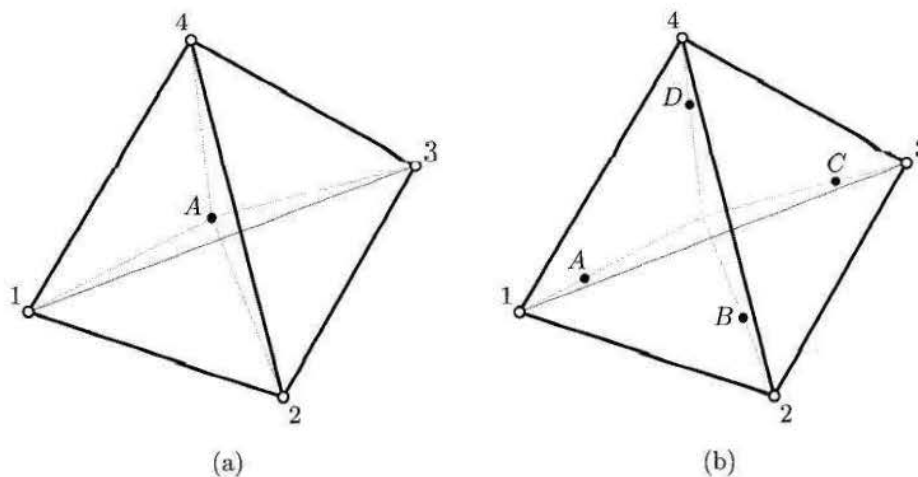


Figura 9.12 Posições dos pontos de integração utilizados nas quadraturas gaussianas (a) de ordem linear e (b) de ordem quadrática, para elementos finitos tetraédricos.

Exercício 9.2. Considere um elemento finito hexaédrico linear de oito nós, tal como o representado na Figura 9.3(a). Respeitando a numeração indicada na Figura 9.13, considere que as coordenadas cartesianas (x_i, y_i, z_i) dos nós 1 a 8 são as indicadas na tabela que se segue.

Nó	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	10	10	0	0	8	9	0	0
y_i	0	10	10	0	2	9	9	1
z_i	0	0	0	0	5	5	5	5

Considere um esquema de integração numérica com um ponto de integração no centro do elemento no sistema local isoparamétrico, isto é, nas coordenadas $\xi = \eta = \zeta = 0$, e calcule:

- A matriz jacobiana da transformação do referencial global cartesiano para o referencial natural isoparamétrico;
- A matriz $\mathbf{B}_1$ das derivadas das funções de forma do nó 1 do elemento finito;
- A submatriz $\mathbf{k}_{11}$ da matriz de rigidez global do elemento.

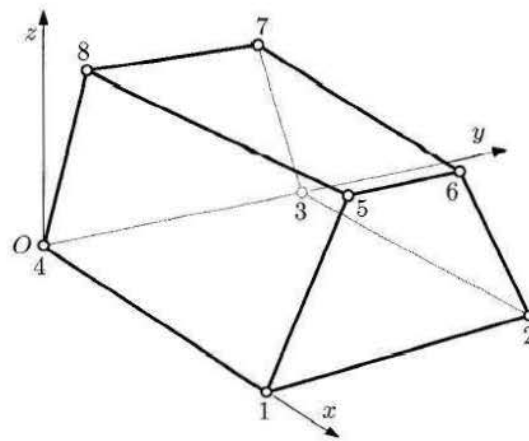


Figura 9.13 Elemento finito hexaédrico linear de oito nós, para o Exercício 9.2.

Resolução

- a) Retomando as equações 9.5 e 9.6 é possível constatar que é necessário determinar as derivadas das funções de forma para o elemento hexaédrico de oito nós em ordem às coordenadas naturais ξ , η e ζ (ver equações 9.9). Estas derivadas, para os nós 1 a 8, são

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta) \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\zeta) \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} = -\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta) \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta) \\ \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\zeta) \\ \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} = -\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta) \\ \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\zeta) \\ \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} = -\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta) \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta) \\ \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\zeta) \\ \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} = -\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta) \end{array} \right.,$$

$$\begin{cases} \frac{\partial N_5}{\partial \xi} = -\frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta) \\ \frac{\partial N_5}{\partial \eta} = -\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\zeta) \\ \frac{\partial N_5}{\partial \zeta} = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial N_6}{\partial \xi} = \frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta) \\ \frac{\partial N_6}{\partial \eta} = -\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\zeta) \\ \frac{\partial N_6}{\partial \zeta} = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial N_7}{\partial \xi} = \frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta) \\ \frac{\partial N_7}{\partial \eta} = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\zeta) \\ \frac{\partial N_7}{\partial \zeta} = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{\partial N_8}{\partial \xi} = -\frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta) \\ \frac{\partial N_8}{\partial \eta} = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\zeta) \\ \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta) \end{cases}$$

Neste caso particular, as derivadas das funções de forma são calculadas no ponto central do elemento, isto é, para $\xi = \eta = \zeta = 0$, uma vez que o esquema de integração numérica é o de apenas um ponto com peso $w_1 = 2$. Consequentemente, o valor das derivadas acima definidas é

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} = -\frac{1}{8},$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{8} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} = -\frac{1}{8},$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{8} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} = -\frac{1}{8},$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{8}, \quad \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{8} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} = -\frac{1}{8},$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = \frac{\partial N_5}{\partial \eta} = -\frac{1}{8} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N_5}{\partial \zeta} = \frac{1}{8},$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = \frac{1}{8}, \quad \frac{\partial N_6}{\partial \eta} = -\frac{1}{8} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N_6}{\partial \zeta} = \frac{1}{8},$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \xi} = \frac{\partial N_7}{\partial \eta} = \frac{\partial N_7}{\partial \zeta} = \frac{1}{8},$$

e

$$\frac{\partial N_8}{\partial \xi} = -\frac{1}{8} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N_8}{\partial \eta} = \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} = \frac{1}{8}.$$

Deste modo, considerando a expressão 9.6, obtém-se a matriz jacobiana

$$\mathbf{J} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 35 & 0 \\ -37 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 20 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, podem também calcular-se a matriz inversa da matriz jacobiana e o respectivo determinante, isto é,

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} -0,06 & -0,216 & 0 \\ 0,229 & 0,006 & 0 \\ -0,012 & -0,033 & 0,400 \end{bmatrix}$$

e

$$\det \mathbf{J} = 50,55.$$

- b) Para calcular a matriz $\mathbf{B}_1$ é necessário conhecer as derivadas das funções de forma em ordem às componentes cartesianas x , y e z no nó 1 do elemento finito hexaédrico. Assim, a partir da equação 9.2 e conhecendo a inversa da matriz jacobiana calculada na alínea anterior ($\mathbf{J}^{-1}$), determinam-se as derivadas procedendo da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}.$$

Substituindo a inversa da matriz jacobiana e os valores das derivadas das funções de forma relativamente às coordenadas ξ , η e ζ , calculam-se as derivadas das funções de forma no referencial $Oxyz$, isto é,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,06 & -0,216 & 0 \\ 0,229 & 0,006 & 0 \\ -0,012 & -0,033 & 0,400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,028 \\ -0,029 \\ -0,044 \end{Bmatrix}.$$

Finalmente, a matriz $\mathbf{B}_1$, associada ao nó 1 do elemento finito, é

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,028 & 0 & 0 \\ 0 & -0,029 & 0 \\ 0 & 0 & -0,044 \\ -0,029 & 0,028 & 0 \\ -0,044 & 0 & 0,028 \\ 0 & -0,044 & -0,029 \end{bmatrix}.$$

- c) No caso presente, a integração numérica da matriz de rigidez é realizada recorrendo apenas à parcela referente ao único ponto de integração utilizado. Deste modo, partindo da equação 9.66, obtêm-se

$$\mathbf{k}_{11} = \iiint_{\Omega^e} (\mathbf{B}_1)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 dx dy dz = \left[(\mathbf{B}_1)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 \right] \Big|_{\xi=\eta=\zeta=0} w_1 (\det \mathbf{J}),$$

em que $w_1 = 2,0$ e $\det \mathbf{J} = 50,55$. Por uma questão de simplicidade, considere-se a mesma matriz constitutiva do exemplo anterior (ver equação 9.53 e resolução do Exercício 9.1). Realizando o produto matricial indicado na relação anterior, e multiplicando pelo peso de integração e pelo determinante da matriz jacobiana, tem-se que

$$\mathbf{k}_{11} = 1 \times 10^4 \begin{bmatrix} 4,52 & -1,67 & -2,52 \\ -1,67 & 4,70 & 2,66 \\ -2,52 & 2,66 & 6,96 \end{bmatrix}.$$

Problemas Propostos

Problema 9.1. Considere o elemento finito tetraédrico de quatro nós do exemplo resolvido 9.1, representado na Figura 9.10 e sujeito à mesma solicitação de tracção.

- Calcule o campo de deslocamentos resultante sabendo que os nós 1 e 2 estão fixos nas direcções Ox , Oy e Oz , que o nó 3 está fixo nas direcções Ox e Oy , e o que o nó 4 está livre;
- Calcule o campo de deformações no elemento finito, considerando as condições da alínea (a);

- c) Calcule o campo de tensões no elemento finito, considerando as condições da alínea (a). Considere ainda que o módulo de elasticidade é $E = 210 \text{ GPa}$ e que o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,3$.
-

Problema 9.2. O domínio tetraédrico considerado no Problema 9.1 pode também ser discretizado recorrendo a um elemento finito tetraédrico de segunda ordem, bastando para tal que se incluam seis nós adicionais no pontos médios das arestas que definem o tetraedro linear original. Neste caso, calcule a nova matriz de rigidez do problema usando as funções de forma deduzidas para o elemento finito tetraédrico de segunda ordem.

Problema 9.3. Considere o elemento finito hexaédrico de oito nós do exercício resolvido 9.2. Efectue a integração da submatriz de rigidez $\mathbf{k}_{11}$ recorrendo a uma quadratura de Gauss-Legendre com dois pontos de integração em cada direcção. Dada a dimensão deste problema, recomenda-se que utilize uma folha de cálculo para o resolver.

Problema 9.4. Para um elemento hexaédrico serendipítico de 20 nós cujas coordenadas naturais e cartesianas coincidam, ou seja, $\xi \equiv x$, $\eta \equiv y$ e $\zeta \equiv z$, prove que a condição

$$N_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij},$$

em que δ_{ij} é o delta de Kronecker, é válida para qualquer par de nós (i, j) .

Problema 9.5. Repita o exercício anterior para o elemento finito hexaédrico lagrangiano de 27 nós.

Referências Bibliográficas

1. Apostol, T.M. *Cálculo — Cálculo com Funções de uma Variável, com uma Introdução à Álgebra Linear*, Vol. 1, Editorial Reverté, Barcelona, Espanha, 1994.

2. Apostol, T.M. *Cálculo — Cálculo com Funções de várias Variáveis e Álgebra Linear, com Aplicações às Equações Diferenciais e às Probabilidades*, Vol. 2, Editorial Reverté, Barcelona, Espanha, 1994.
3. Dhondt, G. *The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications*, John Wiley & Sons, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2004.
4. Fish, J., Belytschko T. *A First Course in Finite Elements*, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido, 2007.
5. Hosford, W.F. *Mechanical Behavior of Materials*, Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2005.
6. Hughes, T.J.R. *The Finite Element Method — Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2000.
7. Lewis, R.W., Morgan, K., Thomas, H.R., Seetharamu, K.N. *The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis*, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido, 1996.
8. Liu, G.R., Quek, S.S. *The Finite Element Method — A Practical Course*, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2003.
9. Oñate, E. *Structural Analysis with the Finite Element Method — Linear Statics: Basis and Solids*, Vol. 1, Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences, Springer-Verlag, Berlin, Alemanha, 2009.
10. Timoshenko, S.P. *Strength of Materials — Part 1: Elementary Theory and Problems, and Part 2: Advanced Theory and Problems*, R.E. Krieger Publishing Co., Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1983.
11. Timoshenko, S.P., Goodier, J.N. *Theory of Elasticity*, 3.^a edição, McGraw-Hill, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1970.
12. Zienkiewicz, O.C., Morgan, K. *Finite Elements and Approximation*, John Wiley & Sons, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1983.
13. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method — The Basis*, Vol. 1, 5.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2000.

Parte IV

Tópicos Complementares e Avançados

28

29

31

Resumo Neste capítulo apresenta-se o conceito de degeneração de um sólido tridimensional em elementos finitos de superfície. Referem-se os sistemas de coordenadas global, natural curvilíneo e local associados a estes elementos de casca degenerados. No âmbito da cinemática dos elementos finitos, define-se geometria, campo de deslocamentos e campo de deformações. Descreve-se o método das deformações naturais assumidas e apresentam-se em detalhe as formulações dos elementos finitos dos tipos casca linear e quadrático. Referem-se os métodos através dos quais se podem implementar as leis constitutivas e determinar as matrizes de rigidez.

10.1 Introdução

Estruturas do tipo placa e do tipo casca são estruturas nas quais uma das suas dimensões (espessura) é substancialmente inferior às restantes. Exemplos de estruturas do tipo placa são, por exemplo, painéis planos em chapa metálica, reforçados ou não, para aplicação na indústria automóvel, aeronáutica ou naval. As estruturas do tipo casca, além de terem uma dimensão (espessura) substancialmente inferior às restantes, têm ainda curvatura, isto é, não são planas. Exemplos típicos de tais estruturas são as tubagens, os reservatórios de pressão, os silos para armazenamento de pós ou granulados, *etc.*

As características geométricas particulares das estruturas do tipo placa e do tipo casca conduzem a um comportamento estrutural distinto do reproduzido através das formulações tridimensionais como as descritas nos capítulos anteriores. Consequentemente, torna-se necessário recorrer a elementos finitos parti-

culares e específicos para a análise deste tipo de estruturas, de entre os quais se destacam os elementos finitos degenerados de sólidos tridimensionais, que serão analisados de forma detalhada neste capítulo. Estes elementos são formulados directamente a partir dos conceitos descritos no Capítulo 9. Consequentemente, a formulação que se apresenta neste capítulo é independente das teorias clássicas das placas e das cascas, o que constitui uma vantagem do ponto de vista da aplicabilidade prática.

O conceito de degeneração de um elemento sólido tridimensional como base de um elemento finito do tipo placa ou do tipo casca surge originalmente com o trabalho de Ahmad e co-autores, no final da década de 60 e início da década de 70 do século XX. A ideia que fundamenta a origem dos elementos degenerados é a redução de um elemento finito sólido tridimensional, tal como, por exemplo, um hexaedro trilinear com oito nós, num elemento de placa ou de casca com quatro nós. Após esta transformação, os nós passam a ser representados sobre uma superfície de referência, tal como se mostra de forma esquemática na Figura 10.1. De acordo com o mesmo procedimento, um elemento sólido lagrangiano de segunda ordem (de 27 nós) pode ser representado na forma degenerada por um elemento finito de superfície com nove nós e lados curvos.

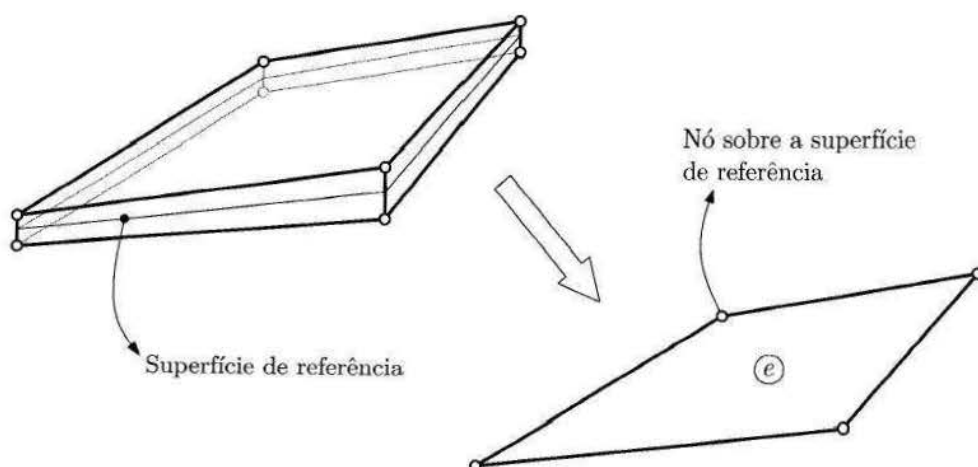


Figura 10.1 Conceito de degeneração de um sólido tridimensional num elemento finito de superfície.

Uma das vantagens principais da utilização de elementos de placa ou de casca degenerados reside no facto de a sua formulação não ser directamente obtida a partir de uma teoria particular clássica de placas/cascas. Uma vez que se trata essencialmente de uma metodologia que tem por base a transformação de

elementos tridimensionais baseados inteiramente em campos de deslocamento e aos quais se aplicam algumas hipóteses simplificativas a nível geométrico e de cinemática, o conceito de elemento degenerado apresenta vantagens evidentes em termos de implementação e esforço computacional. Adicionalmente, ao introduzir a transformação de uma topologia sólida noutra alternativa na forma de superfícies, assumem-se como válidas as hipóteses de Reissner-Mindlin, ou seja, admite-se como válida a hipótese de que as normais à superfície de referência do elemento degenerado antes da deformação permanecem rectas — embora não necessariamente normais — durante a deformação do elemento finito. Uma outra hipótese importante relacionada com os elementos de casca degenerados prende-se com a energia de deformação associada às tensões normais à superfície de referência, que pode ser desprezada. Desta forma, invoca-se indirectamente um estado plano de tensão, em que as variações de espessura calculadas nos nós do elemento finito podem obter-se directamente a partir da deformação normal, recorrendo a leis constitutivas apropriadas.

10.2 Sistemas de coordenadas

Na definição das relações cinemáticas baseadas no campo de deslocamentos e que regem o comportamento do elemento finito degenerado torna-se importante definir um conjunto de referenciais ou sistemas de coordenadas específicos, para além do referencial global implicitamente utilizado nos elementos uni-, bi- e tridimensionais. Tipicamente, é necessário também definir um sistema de coordenadas natural curvilíneo, um sistema de coordenadas local do elemento e, finalmente, um sistema de coordenadas local associado aos nós do elemento. Estes quatro sistemas de coordenadas serão descritos em detalhe nas secções seguintes, antes de serem utilizados na definição da cinemática de elementos degenerados, bem como na escolha dos graus de liberdade nodais associados aos elementos finitos. Na análise que se segue, será dedicada especial atenção à formulação geral de elementos de casca degenerados, sendo os elementos do tipo placa definidos como casos particulares dos primeiros.

10.2.1 Sistema de coordenadas global

Por definição, o sistema de coordenadas global está associado a um referencial inercial externo ao elemento finito, em relação ao qual é definida a geometria e

a posição do elemento finito recorrendo aos deslocamentos nodais ao longo do processo de deformação. Considerando o elemento finito lagrangiano genérico do tipo casca com nove nós posicionados ao longo da sua superfície de referência, conforme representado na Figura 10.2, a posição de um ponto do elemento num dado instante pode ser descrita através do vector posição $\mathbf{x}$ dos nós do elemento ou, em alternativa, através do vector de deslocamentos nodais $\mathbf{u}$ relativamente a uma posição de referência conhecida.

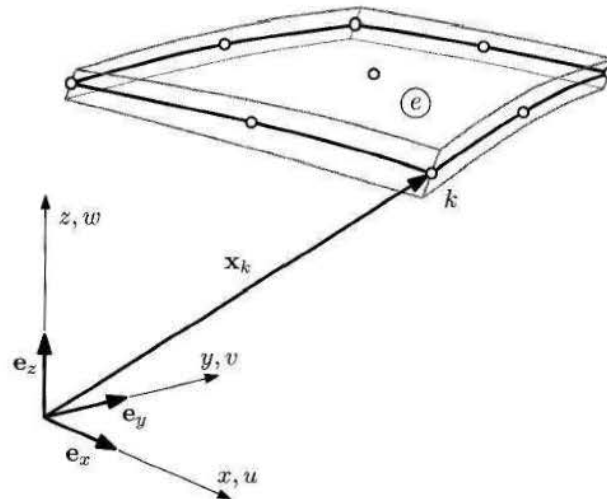


Figura 10.2 Referencial global externo ao elemento finito do tipo casca e vector de posição nodal $\mathbf{x}_k$ do nó genérico k .

Ambos os vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$ podem ser descritos relativamente ao referencial global externo ao elemento, conforme se mostra na Figura 10.2. O vector posição de um nó genérico k do elemento e pode ser descrito como

$$\mathbf{x}_k^e = \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{Bmatrix}. \quad (10.1)$$

Entre dois instantes t e $t + \Delta t$, o deslocamento nodal relativo ao referencial global pode ser determinado recorrendo à relação

$${}^{t+\Delta t}_t \mathbf{u}_k = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{x}_k - {}^t \mathbf{x}_k, \quad (10.2)$$

conforme representado na Figura 10.3. Os vectores unitários $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_z$ são os versores associados aos eixos globais Ox , Oy e Oz , respectivamente.

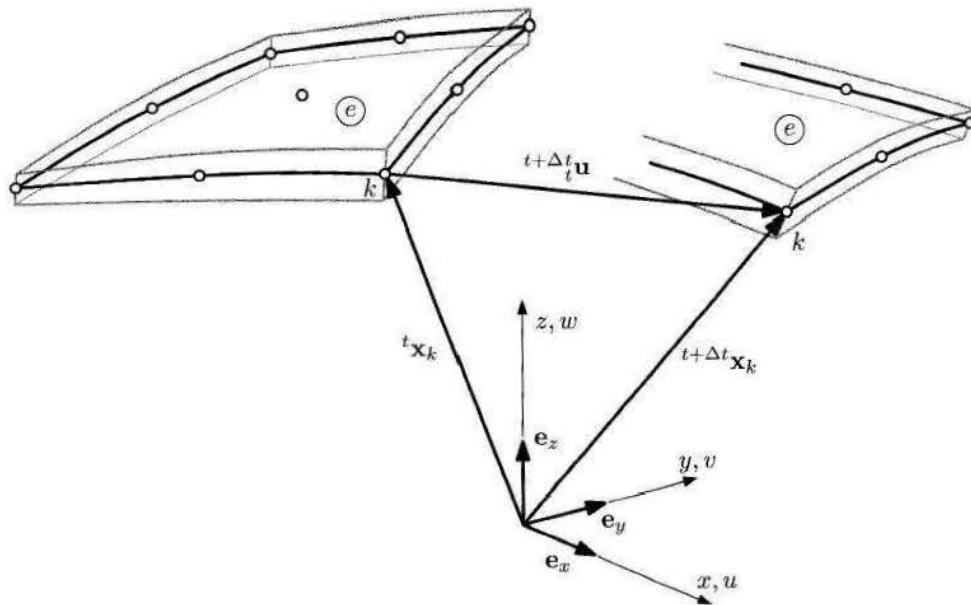


Figura 10.3 Deslocamento nodal entre dois instantes, relativamente ao referencial global.

10.2.2 Sistema de coordenadas curvilíneo natural

Tratando-se de um referencial natural do elemento, utiliza-se novamente o sistema de coordenadas naturais $O\xi\eta$, adoptado anteriormente aquando da análise de elementos finitos isoparamétricos. No entanto, no caso particular dos elementos de casca, as coordenadas naturais $O\xi\eta$ estão assentes num par de eixos curvilíneos sobre a superfície de referência do elemento, acompanhando a curvatura desta superfície e variando, como anteriormente, no intervalo $[-1, +1]$. O terceiro eixo natural $O\zeta$, cuja direcção coincide com a direcção da espessura, é um eixo linear segundo essa direcção, tendo como origem o ponto em análise sobre a superfície de referência, de coordenadas naturais $(0, 0, 0)$. Note-se que a espessura do elemento finito é significativamente inferior às restantes dimensões. Refira-se ainda que a orientação $O\zeta$ não é geralmente normal à superfície de referência, exceptuando-se o caso particular da análise de um elemento finito de placa, em que a superfície de referência é plana. Na Figura 10.4 representa-se es-

quemeticamente o sistema de coordenadas curvilíneo natural para um elemento finito genérico do tipo casca, com origem no centro do elemento. Indicam-se também as coordenadas naturais extremas do elemento.

A partir da Figura 10.4 pode observar-se que os limites da coordenada natural ao longo da espessura — $\zeta \in [-1, +1]$ — correspondem ao limite físico $[-\frac{t}{2}, +\frac{t}{2}]$, em que t designa a espessura nominal do elemento finito.

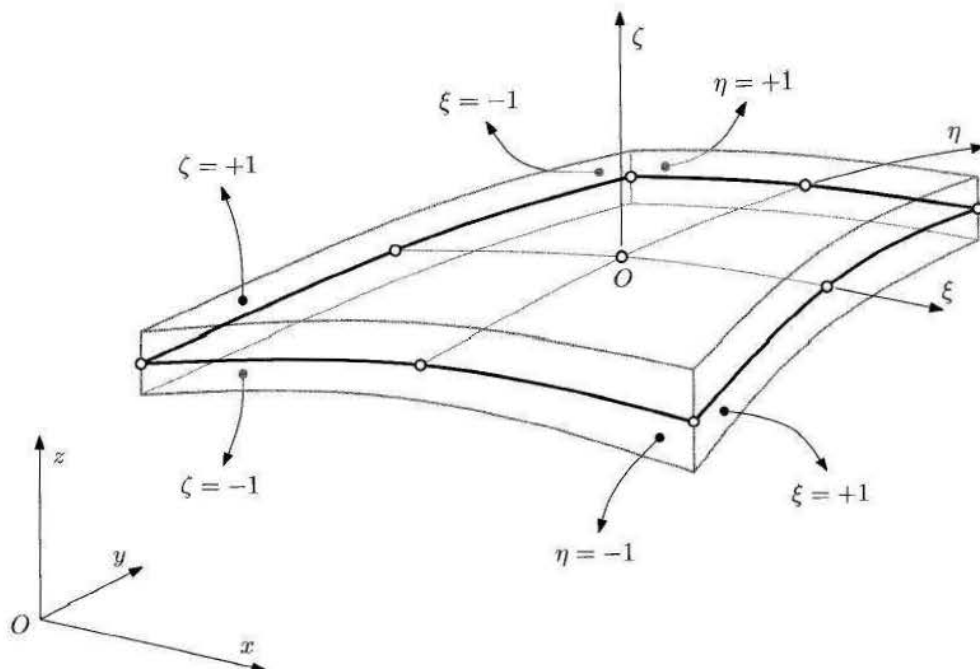


Figura 10.4 Referencial natural curvilíneo para um elemento finito do tipo casca.

10.2.3 Sistema de coordenadas local

Em qualquer ponto de posição genérica (ξ, η, ζ) no elemento finito pode ser definido um referencial local cartesiano $Ox'y'z'$ que acompanha a deformação do elemento finito. Este referencial local torna-se extremamente útil para o cálculo e a representação de estados de tensão e de deformação locais. A título de exemplo, os eixos locais podem ser associados a eixos de anisotropia do material na simulação numérica da conformação plástica de chapas metálicas ou

a eixos de referência circunferencial, radial e longitudinal na análise de tubagens submetidas a grandes deformações.

A determinação dos sistemas de eixos locais no plano do elemento finito pode ser levada a cabo através dos vectores tangentes aos eixos naturais curvilíneos descritos anteriormente. Note-se que o sistema de eixos locais pode ser associado a qualquer ponto do elemento com coordenadas genéricas naturais (ξ, η, ζ) . Consequentemente, pode variar para um dado ponto sobre a superfície de referência do elemento, com ξ e η constantes, mas em diferentes posições ao longo da direcção da sua espessura do elemento, isto é, com ζ variável.

O eixo local perpendicular à superfície de referência do elemento num determinado ponto de coordenadas $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ pode ser determinado efectuando o produto vectorial dos vectores tangentes à superfície de referência nesse ponto, ou seja,

$$\mathbf{z}' = \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right\} \times \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad (10.3)$$

que é função do vector de coordenadas globais $\mathbf{x}$ nesse ponto. O versor unitário associado ao vector local $\mathbf{z}'$ pode então ser directamente obtido por normalização, isto é,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{z}'}{\|\mathbf{z}'\|} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}. \quad (10.4)$$

Sem perda de generalidade, a direcção local $\mathbf{x}'$ pode ser referenciada como a da tangente à coordenada natural ξ no ponto em análise, ou seja,

$$\mathbf{x}' = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix}. \quad (10.5)$$

O versor unitário correspondente é

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Bmatrix}. \quad (10.6)$$

Desta forma, a partir dos versores anteriormente definidos, a terceira direcção local pode ser determinada através do versor $\mathbf{m}$, recorrendo à seguinte expressão:

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{l} = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix}. \quad (10.7)$$

O mesmo procedimento pode ser adoptado para as restantes direcções locais, em conformidade com os passos anteriores. Adicionalmente, o sistema de eixos locais, para além de variar de ponto para ponto na superfície de referência do elemento finito, como se pode ver na Figura 10.5, pode também variar ao longo da direcção da espessura do próprio elemento.

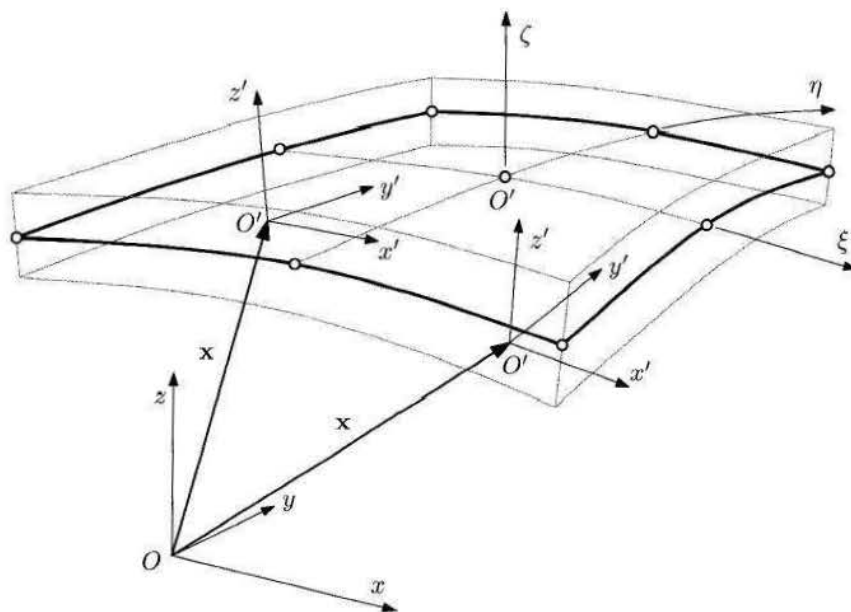


Figura 10.5 Referencial local em dois pontos genéricos num elemento finito genérico do tipo casca.

A ordenação dos eixos locais definidos nos parágrafos anteriores, numa forma matricial, pode ser utilizada para definir uma matriz de transformação do referencial local para o referencial global na forma

$$\mathbf{T}_{lg} = [\mathbf{l} \ \mathbf{m} \ \mathbf{n}], \quad (10.8)$$

em que o índice inferior lg se refere à transformação do referencial local para o referencial global.

10.2.4 Sistema de coordenadas local nodal

Particularizando um sistema de coordenadas local, mas com origem num dos nós do elemento sobre a superfície de referência, pode ser definido um referencial cartesiano local nodal que, pela sua importância na definição dos graus de liberdade de rotação dos elementos degenerados do tipo casca e do tipo placa, merece ser analisado em detalhe. Nos parágrafos que se seguem, o referencial local nodal é constituído pelos vectores V_{1k} , V_{2k} e V_{3k} num determinado nó genérico k , conforme se pode ver na Figura 10.6.

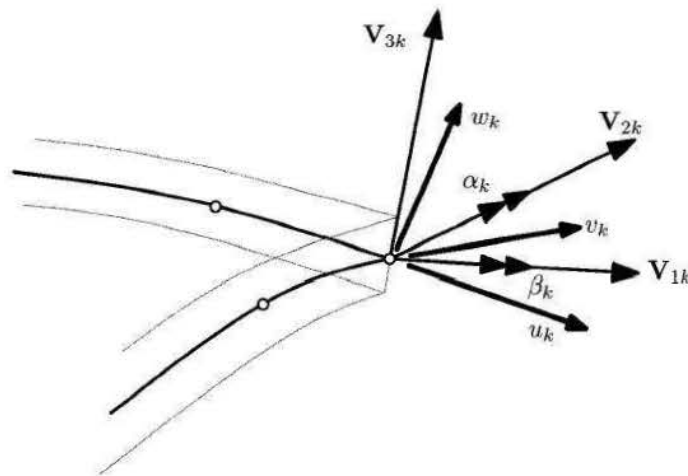


Figura 10.6 Referencial local nodal e graus de liberdade de translação globais u_k , v_k e w_k , e rotações locais α_k e β_k para o nó k .

O ponto de partida para a definição de um referencial local nodal adequado é a escolha do vector normal no nó genérico k , ou seja, o vector V_{3k} . A forma mais imediata e simples, em termos de implementação a partir de um elemento finito tridimensional, consiste em descrever o vector V_{3k} em função das coordenadas superiores e inferiores, medidas relativamente ao referencial global, do nó k , na forma

$$\mathbf{V}_{3k} = \left\{ \begin{matrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{matrix} \right\}_{\text{sup}} - \left\{ \begin{matrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{matrix} \right\}_{\text{inf}} . \quad (10.9)$$

Desta forma, o vector $\mathbf{V}_{3k}$ pode ser decomposto e associado ao valor da espessura nodal a_k o seu respectivo versor, ou seja,

$$\mathbf{V}_{3k} = a_k \mathbf{v}_{3k}, \quad (10.10)$$

em que

$$\|\mathbf{v}_{3k}\| = 1. \quad (10.11)$$

Uma vez que o vector $\mathbf{V}_{3k}$ pode ser obtido através da posição de nós do elemento fictício tridimensional de base e não através da geometria da superfície de referência, não é garantida à partida a relação de normalidade entre aquele vector e a superfície de referência no nó k . De facto, o cálculo das direcções tangentes aos eixos curvilíneos naturais na superfície de referência e o seu posterior produto vectorial (como foi utilizado na definição do referencial local genérico) conduziria a um vector normal à superfície de referência nesse ponto. No entanto, a escolha da definição do vector $\mathbf{V}_{3k}$ através das posições dos nós superior e inferior à superfície de referência é útil no sentido em que permite garantir a continuidade geométrica em modelos de cascas facetadas ou mesmo na análise de placas e de cascas reforçadas. Nestes casos é possível haver descontinuidades geométricas na estrutura, tal como se mostra na Figura 10.7.

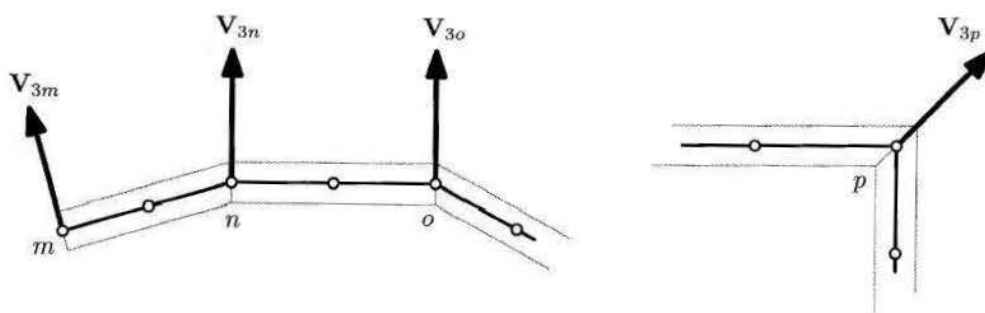


Figura 10.7 Modelos de discretização para cascas facetadas com os respectivos vectores locais nodais $\mathbf{V}_{3k}$.

A partir da definição anterior para o vector $\mathbf{V}_{3k}$, ao longo da direcção da espessura a_k , podem definir-se os restantes vectores de diferentes modos recor-

rendo, por exemplo, aos vectores unitários do referencial global, ou seja,

$$\mathbf{V}_{1k} = \mathbf{e}_x \times \mathbf{V}_{3k}, \quad (10.12)$$

garantindo-se assim a obtenção de um vector perpendicular ao vector $\mathbf{V}_{3k}$ e paralelo ao plano Oyz . No caso particular em que $\mathbf{V}_{3k}$ seja paralelo a $\mathbf{e}_x$, a equação anterior é modificada em conformidade, passando o vector $\mathbf{V}_{1k}$ a ser definido através do seguinte produto vectorial:

$$\mathbf{V}_{1k} = \mathbf{e}_y \times \mathbf{V}_{3k}, \quad (10.13)$$

e, finalmente, a tríade do referencial local nodal fica completa com a definição do vector $\mathbf{V}_{2k}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{V}_{2k} = \mathbf{V}_{3k} \times \mathbf{V}_{1k}. \quad (10.14)$$

A partir da definição do referencial local nodal, os graus de liberdade nodais do elemento degenerado de placa ou de casca podem ser definidos, na sua forma mais usual, através dos três deslocamentos nodais u_k , v_k e w_k , e das duas rotações nodais α_k e β_k em torno das direcções associadas aos vectores $\mathbf{V}_{2k}$ e $\mathbf{V}_{1k}$, respectivamente, como se mostra na Figura 10.6. Neste caso, o vector de graus de liberdade nodal apresenta a seguinte configuração:

$$\mathbf{d}_k = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix}. \quad (10.15)$$

Os graus de liberdade de translação estão directamente associados ao referencial global, conforme representado pela equação 10.2, enquanto que os graus de liberdade de rotação são definidos exclusivamente em relação ao referencial local no nó.

10.3 Cinemática dos elementos finitos

10.3.1 Geometria e campo de deslocamentos

Partindo de uma formulação isoparamétrica para a geometria do elemento, isto é, baseada nas mesmas funções de forma a serem utilizadas na definição do campo de deslocamentos, as coordenadas de um ponto qualquer no interior do elemento finito podem ser determinadas em função das coordenadas dos nós (relativamente ao referencial global) na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^e &= \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix}^e \\ &= \sum_{k=1}^{n_{\text{nos}}} N_k(\xi, \eta) \frac{1+\zeta}{2} \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{Bmatrix}_{\text{sup}}^e + \sum_{k=1}^{n_{\text{nos}}} N_k(\xi, \eta) \frac{1-\zeta}{2} \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{Bmatrix}_{\text{inf}}^e, \end{aligned} \quad (10.16)$$

a partir das coordenadas naturais (ξ, η, ζ) do ponto em questão e das coordenadas globais superiores — designadas pelo índice inferior sup — e inferiores — designadas pelo índice inferior inf — em relação aos nós da superfície de referência. Note-se que, na equação 10.16, as funções de forma para o nó k são funções de interpolação para a superfície de referência do elemento ao longo das coordenadas (ξ, η) e coincidem, consequentemente, com as funções já descritas no Capítulo 8.

Em alternativa, pode definir-se uma função de interpolação para a posição de um ponto qualquer do elemento finito a partir de operadores relacionados com a superfície de referência, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^e &= \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix}^e \\ &= \sum_{k=1}^{n_{\text{nos}}} N_k(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{Bmatrix}_{\text{ref}}^e + \sum_{k=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{a_k}{2} \zeta N_k(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} v_{3x}^k \\ v_{3y}^k \\ v_{3z}^k \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (10.17)$$

a partir da coordenada global da projecção da posição do ponto considerado sobre a superfície de referência — designada pelo índice inferior ref —, dos

valores das espessuras nodais a_k , da coordenada natural fora da superfície de referência ζ e das componentes cartesianas dos vectores unitários locais nodais $\mathbf{v}_{3k} = (v_{3x}^k, v_{3y}^k, v_{3z}^k)$.

A partir da aplicação da equação 10.17 a dois instantes sucessivos é possível definir o campo de deslocamentos para um qualquer ponto do elemento finito como

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix}^e = \sum_{k=1}^{n_{\text{nos}}} N_k(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix}^e + \sum_{k=1}^{n_{\text{nos}}} \frac{a_k}{2} \zeta N_k(\xi, \eta) \begin{bmatrix} v_{1x}^k & -v_{2x}^k \\ v_{1y}^k & -v_{2y}^k \\ v_{1z}^k & -v_{2z}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix} \quad (10.18)$$

ou, numa forma mais compacta,

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix}^e = \sum_{k=1}^{n_{\text{nos}}} \begin{bmatrix} N_k & 0 & 0 & \frac{a_k}{2} \zeta N_k v_{1x}^k & -\frac{a_k}{2} \zeta N_k v_{2x}^k \\ 0 & N_k & 0 & \frac{a_k}{2} \zeta N_k v_{1y}^k & -\frac{a_k}{2} \zeta N_k v_{2y}^k \\ 0 & 0 & N_k & \frac{a_k}{2} \zeta N_k v_{1z}^k & -\frac{a_k}{2} \zeta N_k v_{2z}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix}. \quad (10.19)$$

Refira-se que o sinal negativo associado ao grau de liberdade de rotação nodal β_k resulta do facto de para uma rotação positiva em torno do eixo definido pelo vector $\mathbf{V}_{1k}$ a extremidade do vector normal $\mathbf{V}_{3k}$ se deslocar no sentido oposto ao definido por $\mathbf{V}_{2k}$, como pode ser constatado analisando a Figura 10.6. No entanto, a escolha desse sentido para os graus de liberdade de rotação não é única, ainda que não influencie significativamente a formulação que se segue.

10.3.2 Campo de deformações

O campo de deformações associado a um qualquer ponto de um elemento finito englobando as deformações lineares e as deformações angulares (extensões e distorções) pode obter-se directamente em relação a qualquer um dos referenciais anteriores, sendo posteriormente transformado ou representado relativamente aos restantes referenciais.

Com o objectivo de introduzir a maior generalidade possível relativamente à representação do campo de deformações, este será, em primeiro lugar, definido em relação a um referencial que não o global, ao contrário do procedimento adoptado inicialmente para os elementos bidimensionais e tridimensionais, descrito em detalhe nos Capítulos 8 e 9.

As componentes do tensor das deformações directamente calculadas, por exemplo, no referencial local (ver Secção 10.2.3) podem determinar-se através das componentes de deformação infinitesimais quer lineares quer angulares como função do campo de deslocamentos de um dado ponto do elemento finito, no mesmo referencial e com componentes (u', v', w') relativamente aos eixos locais x' , y' e z' . Adicionalmente, a hipótese de que a energia de deformação na direcção normal à superfície de referência é nula (estado plano de tensão, com $\sigma_{z'z'} = 0$) permite, nesta fase, não incluir a componente de deformação local $\varepsilon_{z'z'}$ na análise, podendo a mesma ser calculada posteriormente por meio das relações constitutivas que venham a ser adoptadas.

Desta forma, o campo de deformações infinitesimais possui cinco componentes na forma

$$\epsilon' = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{Bmatrix}, \quad (10.20)$$

calculadas directamente através do campo de deslocamentos em relação ao sistema de eixos local. No entanto, as derivadas parciais na expressão 10.20 podem também ser reescritas relativamente ao referencial global. Por exemplo, para a deformação linear $\varepsilon_{x'x'}$, obtém-se

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'}. \quad (10.21)$$

Designando por x'/x , x'/y e x'/z os cossenos dos ângulos definidos pelos eixos globais Ox , Oy e Oz , e o eixo local Ox' , respectivamente, as equações anteriores podem reescrever-se na seguinte forma:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial x} (x'/x) + \frac{\partial u'}{\partial y} (x'/y) + \frac{\partial u'}{\partial z} (x'/z). \quad (10.22)$$

Por outro lado, é válida a relação

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (10.23)$$

que, através da introdução dos cossenos dos ângulos formados pelas direcções globais Ox , Oy e Oz , e o eixo local Ox' , pode ser reescrita como

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = (x'/x) \frac{\partial u}{\partial x} + (x'/y) \frac{\partial v}{\partial x} + (x'/z) \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (10.24)$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial y} &= \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \\ &= (x'/x) \frac{\partial u}{\partial y} + (x'/y) \frac{\partial v}{\partial y} + (x'/z) \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (10.25)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial z} &= \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= (x'/x) \frac{\partial u}{\partial z} + (x'/y) \frac{\partial v}{\partial z} + (x'/z) \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (10.26)$$

A substituição das equações 10.24 a 10.26 na relação 10.22 conduz à igualdade

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = (x'/x)^2 \frac{\partial u}{\partial x} + (x'/y)^2 \frac{\partial v}{\partial y} + (x'/z)^2 \frac{\partial w}{\partial z} \quad (10.27)$$

$$+ (x'/x) (x'/y) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (x'/x) (x'/z) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (10.28)$$

$$+ (x'/y) (x'/z) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (10.29)$$

equação esta que relaciona uma deformação linear infinitesimal segundo uma direcção local com o campo de deformações no referencial global.

Desenvolvendo o mesmo procedimento para as restantes componentes de deformação na equação 10.20, é possível construir uma matriz que transforme o campo de deformações completo do referencial global para o local, ou seja,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{gl} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (10.30)$$

em que o índice inferior gl se refere à transformação de coordenadas do referencial global para o referencial local. Então, de forma extensa, a matriz de transformação é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{gl} = & \begin{bmatrix} (x'/x)^2 & (x'/y)^2 & (x'/z)^2 \\ (y'/x)^2 & (y'/y)^2 & (y'/z)^2 \\ 2(x'/x)(y'/x) & 2(x'/y)(y'/y) & 2(x'/z)(y'/z) \\ 2(x'/x)(z'/x) & 2(x'/y)(z'/y) & 2(x'/z)(z'/z) \\ 2(y'/x)(z'/x) & 2(y'/y)(z'/y) & 2(y'/z)(z'/z) \end{bmatrix} \oplus \\ & \begin{bmatrix} (x'/x)(x'/y) & (x'/x)(x'/z) \\ (y'/x)(y'/y) & (y'/x)(y'/z) \\ (x'/x)(y'/y) + (x'/y)(y'/x) & (x'/x)(y'/z) + (x'/z)(y'/x) \\ (x'/x)(z'/y) + (x'/y)(z'/x) & (x'/x)(z'/z) + (x'/z)(z'/x) \\ (y'/x)(z'/y) + (y'/y)(z'/x) & (y'/x)(z'/z) + (y'/z)(z'/x) \end{bmatrix} \oplus \\ & \begin{bmatrix} (x'/y)(x'/z) \\ (y'/y)(y'/z) \\ (x'/y)(y'/z) + (x'/z)(y'/y) \\ (x'/y)(z'/z) + (x'/z)(z'/y) \\ (y'/y)(z'/z) + (y'/z)(z'/y) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Por outro lado, as derivadas parciais utilizadas para determinar o campo de deformações no referencial global, na relação 10.30, estão relacionadas com as derivadas parciais relativas às coordenadas naturais ξ , η e ζ através da matriz jacobiana $\mathbf{J}$, na forma

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{D}_{\text{gn}}, \quad (10.32)$$

em que o índice inferior gn se refere à transformação do referencial global para o referencial natural do elemento. Por outro lado, como já visto anteriormente, a matriz jacobiana corresponde a

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}, \quad (10.33)$$

ou seja, a matriz jacobiana é função do vector posição relativamente ao referencial global (ver equação 10.17). Uma vez que o operador $\mathbf{T}_{\text{gl}}$ influencia directamente a matriz das derivadas parciais $\mathbf{B}$, a matriz de transformação descrita na equação 10.31 é calculada para cada ponto de Gauss, utilizado na integração numérica da matriz de rigidez do elemento. No entanto, no caso da análise de placas, por exemplo, pode simplificar-se e aproximar a análise recorrendo ao cálculo de uma matriz de transformação representativa para cada elemento de placa, assumindo que o referencial nodal local mantém-se inalterado em cada elemento, podendo este, no entanto, variar de elemento para elemento.

De volta à matriz $\mathbf{D}_{\text{gn}}$ das derivadas parciais dos graus de liberdade globais de translação u , v e w relativamente ao referencial natural do elemento, representada na equação 10.32, para um nó genérico k é possível adoptar a seguinte relação:

$$\mathbf{D}_{\text{gn}}|_k = (\bar{\mathbf{u}} + \bar{\alpha} + \bar{\beta})|_k, \quad (10.34)$$

em que, a partir das definições expressas na relação 10.19, se obtém

$$\bar{\mathbf{u}}|_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} u_k & \frac{\partial N_k}{\partial \xi} v_k & \frac{\partial N_k}{\partial \xi} w_k \\ \frac{\partial N_k}{\partial \eta} u_k & \frac{\partial N_k}{\partial \eta} v_k & \frac{\partial N_k}{\partial \eta} w_k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (10.35)$$

$$\bar{\alpha}|_k = \begin{bmatrix} \zeta \frac{\partial N_k}{\partial \xi} v_{1x}^k & \zeta \frac{\partial N_k}{\partial \xi} v_{1y}^k & \zeta \frac{\partial N_k}{\partial \xi} v_{1z}^k \\ \zeta \frac{\partial N_k}{\partial \eta} v_{1x}^k & \zeta \frac{\partial N_k}{\partial \eta} v_{1y}^k & \zeta \frac{\partial N_k}{\partial \eta} v_{1z}^k \\ N_k v_{1x}^k & N_k v_{1y}^k & N_k v_{1z}^k \end{bmatrix} \frac{a_k}{2} \alpha_k \quad (10.36)$$

e

$$\bar{\beta}|_k = - \begin{bmatrix} \zeta \frac{\partial N_k}{\partial \xi} v_{2x}^k & \zeta \frac{\partial N_k}{\partial \xi} v_{2y}^k & \zeta \frac{\partial N_k}{\partial \xi} v_{2z}^k \\ \zeta \frac{\partial N_k}{\partial \eta} v_{2x}^k & \zeta \frac{\partial N_k}{\partial \eta} v_{2y}^k & \zeta \frac{\partial N_k}{\partial \eta} v_{2z}^k \\ N_k v_{2x}^k & N_k v_{2y}^k & N_k v_{2z}^k \end{bmatrix} \frac{a_k}{2} \beta_k. \quad (10.37)$$

A partir deste ponto, através da definição das derivadas parciais que surgem na equação 10.34 e das derivadas parciais da matriz jacobiana, na equação 10.33, o campo de deformações no referencial global pode ser calculado através da equação 10.32. Posteriormente, o campo de deformações no referencial local pode ser determinado recorrendo à equação 10.30. As derivadas parciais dos graus de liberdade de deslocamento relativamente ao referencial global, representadas no primeiro membro da equação 10.32, podem ser reescritas numa forma mais conveniente levando em conta a definição explícita da matriz de deformações **B**. Para o efeito, considere-se na equação 10.32 cada coluna isoladamente e explicita-se cada uma das derivadas parciais com base nas expressões gerais para os graus de liberdade de translação num qualquer ponto k do elemento finito, expressões essas definidas na equação 10.19. Desta forma, chega-se às igualdades

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n_{\text{nos}}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x} & g_{1x}^k G_x^k & g_{2x}^k G_x^k \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} & g_{1y}^k G_y^k & g_{2y}^k G_y^k \\ \frac{\partial N_k}{\partial z} & g_{1z}^k G_z^k & g_{2z}^k G_z^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n_{\text{nos}}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x} & g_{1y}^k G_x^k & g_{2y}^k G_x^k \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} & g_{1y}^k G_y^k & g_{2y}^k G_y^k \\ \frac{\partial N_k}{\partial z} & g_{1y}^k G_z^k & g_{2y}^k G_z^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix} \quad (10.38)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n_{\text{nos}}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x} & g_{1z}^k G_x^k & g_{2z}^k G_x^k \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} & g_{1z}^k G_y^k & g_{2z}^k G_y^k \\ \frac{\partial N_k}{\partial z} & g_{1z}^k G_z^k & g_{2z}^k G_z^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix}.$$

Como é habitual, as derivadas parciais das funções de forma num nó genérico sobre a superfície de referência, relativamente ao referencial global, podem ser escritas na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k}{\partial x} &= J_{11}^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + J_{12}^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} &= J_{21}^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + J_{22}^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_k}{\partial z} &= J_{31}^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + J_{32}^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (10.39)$$

Note-se a ausência, nas equações anteriores, de derivadas parciais das funções de forma relativamente à coordenada natural ζ , dado que as primeiras são definidas relativamente ao espaço bidimensional da superfície de referência do elemento, ou seja, são as mesmas funções de forma no plano, utilizadas anteriormente na análise de elementos bidimensionais (ver Capítulo 8). Ainda no que diz respeito às equações anteriores, é necessário realçar que o termo J_{ij}^{-1} diz respeito à componente ij da matriz inversa da matriz jacobiana, esta última representada na equação 10.33. Os restantes termos que surgem nas equações 10.38 são dados por

$$\begin{cases} g_{1x}^k = \frac{1}{2} a_k v_{1x}^k \\ g_{1y}^k = \frac{1}{2} a_k v_{1y}^k \\ g_{1z}^k = \frac{1}{2} a_k v_{1z}^k \end{cases}, \quad \begin{cases} g_{2x}^k = -\frac{1}{2} a_k v_{2x}^k \\ g_{2y}^k = -\frac{1}{2} a_k v_{2y}^k \\ g_{2z}^k = -\frac{1}{2} a_k v_{2z}^k \end{cases}, \quad (10.40)$$

e, ainda,

$$\begin{cases} G_x^k = \zeta \left(J_{11}^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + J_{12}^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \right) + J_{13}^{-1} N_k \\ G_y^k = \zeta \left(J_{21}^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + J_{22}^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \right) + J_{23}^{-1} N_k \\ G_z^k = \zeta \left(J_{31}^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + J_{32}^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \right) + J_{33}^{-1} N_k \end{cases} \quad (10.41)$$

Agrupando os termos anteriores do campo das deformações para um qualquer ponto no elemento finito e relativamente ao referencial global como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}^e, \quad (10.42)$$

obtém-se uma expressão geral para a partição da matriz $\mathbf{B}$ relativa ao nó genérico k , isto é,

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \cdots \ \mathbf{B}_k \ \cdots \ \mathbf{B}_{n_{\text{nos}}}], \quad (10.43)$$

com

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & 0 & g_{1x}^k G_x^k & g_{2x}^k G_x^k \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & g_{1y}^k G_y^k & g_{2y}^k G_y^k \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial z} & g_{1z}^k G_z^k & g_{2z}^k G_z^k \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & g_{1x}^k G_y^k + g_{1y}^k G_x^k & g_{2x}^k G_y^k + g_{2y}^k G_x^k \\ \frac{\partial N_k}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & g_{1x}^k G_z^k + g_{1z}^k G_x^k & g_{2x}^k G_z^k + g_{2z}^k G_x^k \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & g_{1y}^k G_z^k + g_{1z}^k G_y^k & g_{2y}^k G_z^k + g_{2z}^k G_y^k \end{bmatrix}. \quad (10.44)$$

Consequentemente, o campo de deformações no referencial local pode ser expresso, conforme a equação 10.30, em função das matrizes anteriores na seguinte forma alternativa:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{T}_{\text{gl}} \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{T}_{\text{gl}} \mathbf{B}) \mathbf{d}^e \equiv \mathbf{B}' \mathbf{d}^e, \quad (10.45)$$

em função da matriz das derivadas parciais $\mathbf{B}'$ calculada relativamente ao referencial local.

10.4 Método das deformações naturais assumidas

10.4.1 Enquadramento

A formulação de elementos finitos do tipo placa e do tipo casca obtida por degeneração de sólidos tridimensionais e apresentada nas secções anteriores baseia-se, exclusivamente, no campo de deslocamentos e na subsequente derivação para obtenção do campo de deformações. Posteriormente, pode ainda determinar-se o campo de tensões num dado elemento finito através das relações constitutivas apropriadas. As matrizes que relacionam o campo de deslocamentos e o campo de deformações foram obtidas relativamente ao referencial global e de seguida transformadas para o referencial local, possibilitando o cálculo de um campo de tensões neste último referencial, local do elemento.

Apesar de ser perfeitamente geral no tratamento e na modelação de estruturas dos tipos casca e placa espessas e moderadamente espessas, a formulação apresentada pode falhar em termos numéricos quando aplicada a estruturas dos tipos placa ou casca com pequenos valores de espessura. O aparecimento dessa deficiência numérica prende-se com o aparecimento de fenómenos de excesso de rigidez. Estes fenómenos, de índole puramente numérica e, portanto, sem qualquer justificação física, afectam os valores dos deslocamentos obtidos com esta formulação após a assemblagem e a resolução do sistema de equações associado à malha global de elementos finitos. A esse aumento não-físico dos termos das matrizes de rigidez a nível elementar e à consequente diminuição dos valores de deslocamentos e/ou rotações nodais dá-se o nome de retenção numérica ou bloqueio da solução numérica. Dependendo do tipo de elemento finito utilizado (linear, quadrático, *etc.*), a retenção numérica pode manifestar-se de duas formas distintas: (i) a retenção em deformações fora do plano de referência do elemento finito — retenção em deformações de corte transversal — e (ii) a retenção em deformações no plano de referência do elemento — retenção em deformações de membrana.

Sem entrar em pormenores matemáticos associados a estes mecanismos de falha numérica dos elementos, a retenção em termos de deformação de corte transversal leva a que o elemento finito seja incapaz de reproduzir correctamente um dado estado de deformações de corte transversal, ou seja, deformações de corte associadas à direcção da espessura do elemento. A energia de deformação associada a essa componente transversal deve assumir valores nulos, por exemplo, no caso de uma casca genérica, à medida que os valores de espessura envolvidos tendem numericamente para zero, para solicitações puramente de

flexão. No entanto, havendo retenção de corte transversal, tal não acontece na simulação numérica.

No caso da retenção em parcelas de membrana do campo de deformações, ou seja, deformações no plano de referência do elemento finito, o excesso de rigidez artificial está associado à incapacidade do elemento reproduzir estados de flexão pura no plano sem a introdução de deformações de membrana adicionais não-físicas, ou espúrias.

Para além da influência dos valores relativos da espessura da casca ou da placa no aparecimento de efeitos de retenção numérica, pode constatar-se que as próprias condições de contorno, a densidade de malha e o seu grau de distorção, ou mesmo o tipo de carregamento utilizado, podem conduzir, em maior ou menor medida, ao aparecimento de soluções que, em termos de deslocamentos, sejam próximas de zero, ou seja, características de um aumento irrealista dos termos presentes nas matrizes de rigidez elementares.

As soluções possíveis para tornar o elemento finito mais “flexível”, atenuando o excesso de rigidez associado à retenção numérica, incluem a utilização de esquemas de integração reduzida. Estes esquemas numéricos, já referidos no contexto dos elementos finitos bidimensionais e tridimensionais baseados em campos de deslocamentos (ver Capítulos 8 e 9) constituem a abordagem mais simples ao problema da retenção. Os esquemas de integração reduzida podem ainda ser classificados em função dos termos de deformação que são interpolados de forma distinta do preconizado pela integração completa. Caso todos os termos de deformação sejam integrados da mesma forma reduzida, está-se perante uma integração reduzida total. Se, pelo contrário, apenas os termos de deformação associados à retenção forem integrados de forma reduzida, enquanto os demais são integrados de forma completa, está-se perante um esquema de integração reduzida selectiva. Para além das técnicas de integração reduzida para alívio da retenção numérica, outras metodologias mais avançadas sugerem o enriquecimento dos termos de deformação associados à retenção, constituindo o que passou a ser conhecido como o método das deformações acrescentadas, utilizado inicialmente em elementos bidimensionais e tridimensionais genéricos, e posteriormente em elementos finitos dos tipos placa e casca.

Neste âmbito, esta obra concentra-se na metodologia porventura mais utilizada para atenuar a retenção numérica em programas comerciais de simulação numérica pelo método dos elementos finitos. Esta metodologia consiste na introdução de pontos de amostragem adicionais dentro do elemento finito — para além dos pontos de integração convencionais utilizados na integração numérica — nos quais serão calculados os termos do campo de deformações passíveis de

serem afectados pela retenção numérica. Os termos de deformação calculados nesses pontos adicionais são depois combinados com os termos de deformação obtidos nos pontos de integração convencionais. O campo de deformações obtido através dessa interpolação extra é mais robusto numericamente e teoricamente mais imune ao aparecimento de termos de rigidez sobrevalorizados. A técnica subjacente a este procedimento envolve a utilização de deformações naturais assumidas e implica assumir como correctos (ou correctores) campos de deformação calculados e trabalhados directamente no referencial natural do elemento finito, antes de os transformar para os referenciais global e local. Os elementos derivados da aplicação dessa técnica foram originalmente designados como possuindo interpolações mistas a partir do tensor das deformações calculado no referencial natural do elemento (MITC¹). Os passos principais associados a esta técnica e as matrizes relevantes que daí advêm são descritos nos parágrafos que se seguem.

10.4.2 Formulação de base

O ponto de partida da análise e da aplicação do método das deformações naturais assumidas consiste em calcular inicialmente o campo de deformações do elemento relativamente ao seu referencial natural, que será a partir deste momento designado por referencial co-variante. O campo de deformações é constituído pelas seguintes componentes:

$$\epsilon'' = \begin{Bmatrix} \epsilon_{\xi\xi} \\ \epsilon_{\eta\eta} \\ \epsilon_{\zeta\zeta} \\ \gamma_{\xi\eta} \\ \gamma_{\xi\zeta} \\ \gamma_{\eta\zeta} \end{Bmatrix}. \quad (10.46)$$

Posteriormente, este campo de deformações, assim como a respectiva matriz das derivadas parciais, pode ser expresso no referencial local do elemento, ou seja,

$$\epsilon' = \mathbf{T}_{nl}\epsilon'', \quad (10.47)$$

através da construção de uma matriz de transformação análoga à apresentada na equação 10.31, mas relacionando o sistema natural com o local, na forma

¹ Em inglês: *mixed interpolation of tensorial components*.

que se segue:

$$\mathbf{T}_{nl} = \begin{bmatrix} T_{11}^2 & T_{12}^2 & T_{13}^2 \\ T_{21}^2 & T_{22}^2 & T_{23}^2 \\ T_{31}^2 & T_{32}^2 & T_{33}^2 \\ 2T_{11}T_{21} & 2T_{12}T_{22} & 2T_{13}T_{23} \\ 2T_{11}T_{31} & 2T_{12}T_{32} & 2T_{13}T_{33} \\ 2T_{21}T_{31} & 2T_{22}T_{32} & 2T_{23}T_{33} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} T_{11}T_{12} & T_{11}T_{13} & T_{12}T_{13} \\ T_{21}T_{22} & T_{21}T_{23} & T_{22}T_{23} \\ T_{31}T_{32} & T_{31}T_{33} & T_{32}T_{33} \\ T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21} & T_{11}T_{23} + T_{13}T_{21} & T_{12}T_{23} + T_{13}T_{22} \\ T_{11}T_{32} + T_{12}T_{31} & T_{11}T_{33} + T_{13}T_{31} & T_{12}T_{33} + T_{13}T_{32} \\ T_{21}T_{32} + T_{22}T_{31} & T_{21}T_{33} + T_{23}T_{31} & T_{22}T_{33} + T_{23}T_{32} \end{bmatrix}. \quad (10.48)$$

O índice inferior nl refere-se à transformação entre os referenciais natural e local. Cada um dos termos que fazem parte da matriz de transformação anterior refere-se à variação entre um eixo convectivo (natural) e um eixo no referencial local do elemento, ou seja,

$$\mathbf{T}_{nl}|_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}, \quad (10.49)$$

em que

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi \\ \xi_2 = \eta \\ \xi_3 = \zeta \end{cases} \quad (10.50)$$

e

$$\begin{cases} x'_1 = x' \\ x'_2 = y' \\ x'_3 = z' \end{cases}. \quad (10.51)$$

Desta forma, cada termo que surge na definição da matriz de transformação em 10.48 pode ser obtido directamente manipulando os termos que fazem parte da matriz inversa da matriz jacobiana (equação 10.33) e dos cossenos directores

utilizados anteriormente na matriz de transformação do referencial global para o local, definida na equação 10.31.

Voltando ao campo de deformações no referencial natural, isto é, co-variante, apresentado na equação 10.46, este pode ser representado na seguinte forma alternativa:

$$\varepsilon''_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i|_t \cdot \mathbf{g}_j|_t - \mathbf{g}_i|_0 \cdot \mathbf{g}_j|_0), \quad (10.52)$$

correspondendo ao termo de deformação ij entre os instantes 0 e t . Em rigor, a equação 10.52 é representativa do tensor de deformações de Green-Lagrange. Este tensor de deformações representa fisicamente a deformação material entre dois instantes de tempo ou duas etapas sucessivas da história de deformação relativamente a uma configuração de referência que, neste contexto, é representativa do instante inicial, ou seja, $t = 0$.

Na equação 10.52, recorrendo ao vector posição global no instante inicial $\mathbf{x}$ e ao vector de deslocamentos global $\mathbf{u}$ entre os instantes 0 e t , podem definir-se as derivadas parciais

$$\mathbf{g}_i|_0 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_i} \quad (10.53)$$

e

$$\mathbf{g}_i|_t = \frac{\partial (\mathbf{x} + \mathbf{u})}{\partial \xi_i} = \mathbf{g}_i|_0 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i}. \quad (10.54)$$

Substituindo os dois operadores anteriores na equação 10.52, obtém-se uma expressão mais explícita com a qual é possível determinar o campo de deformações em relação ao referencial natural do elemento, ou seja,

$$\varepsilon''_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \cdot \mathbf{g}_j|_0 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j} \cdot \mathbf{g}_i|_0 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j} \right). \quad (10.55)$$

A expressão anterior contém termos lineares de deformação e termos não-lineares (último termo do segundo membro) que são responsáveis pela modelação de efeitos não-lineares geométricos e necessários dessa forma para descrever grandes deformações ou extensões (ver Capítulo 12). Não sendo, no entanto, este o objectivo deste capítulo, a expressão anterior vai ser trabalhada no que se segue apenas na sua vertente linear, ou seja, considerando que

$$\varepsilon''_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \cdot \mathbf{g}_j|_0 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j} \cdot \mathbf{g}_i|_0 \right). \quad (10.56)$$

Esta expressão é o ponto de partida para a definição linear, isto é, em pequenas deformações, do campo de deformações original no referencial natural do elemento e, posteriormente, do campo de deformações modificado do ponto de vista do método das deformações naturais assumidas, o qual é responsável por melhorar o desempenho da formulação no que toca à retenção numérica. Por uma questão de simplicidade na análise, o campo de deformações calculado directamente através da equação 10.56 será representado no que se segue através do índice D, enquanto o campo de deformações modificado será distinguido pelo índice ANS². Desta forma, um dado termo do campo de deformações naturais assumidas pode ser determinado recorrendo à expressão

$$\varepsilon''_{ij}|_{\text{ANS}}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{p=1}^{n_{\text{pl}}} N_p^*(\xi, \eta) \varepsilon''_{ij}|_{\text{D}}(\xi_p, \eta_p, \zeta). \quad (10.57)$$

A expressão anterior define o campo de deformações assumido (modificado), calculado num ponto do elemento de coordenadas (ξ, η, ζ) . Este campo de deformações é o resultado da ponderação do campo de deformações original, baseado nos deslocamentos e calculado num conjunto independente de pontos de ligação n_{pl} com coordenadas na superfície de referência (ξ_p, η_p) . Sendo pontos de interpolação distintos dos usuais, os pontos de ligação possuem funções de forma próprias N_p^* que são calculadas nos pontos de integração originais, conforme especificado pela equação 10.57.

As funções de forma N_p^* , introduzidas na equação anterior, gozam da propriedade de terem valores unitários em cada um dos n_{pl} pontos de ligação utilizados e serem nulas nos restantes, do que se depreende que nesses pontos de ligação o campo de deformações assumido é exactamente igual ao campo de deformações directamente obtido a partir do campo de deslocamentos.

O conceito de interpolação mista dos campos de deformações assumido e original, recorrendo a pontos de integração (ligação) adicionais, é melhor exemplificado formulando as expressões concretas para os elementos do tipo casca linear de quatro nós e quadrático de nove nós.

² Em inglês: *assumed natural strains*.

10.4.3 Elemento finito do tipo casca linear

Nos parágrafos que se seguem são descritas as funções de interpolação e os campos de deformações correspondentes ao elemento finito do tipo casca linear de quatro nós.

Neste tipo de elemento finito, os efeitos de retenção associados às componentes de deformação fora do plano, ou seja, de corte transversal, são dominantes para espessuras relativamente reduzidas. Apenas esses termos do campo de deformações serão modificados relativamente ao campo de deformações original que provém directamente do campo de deslocamentos. Os pontos de ligação utilizados para este efeito estão representados na Figura 10.8.

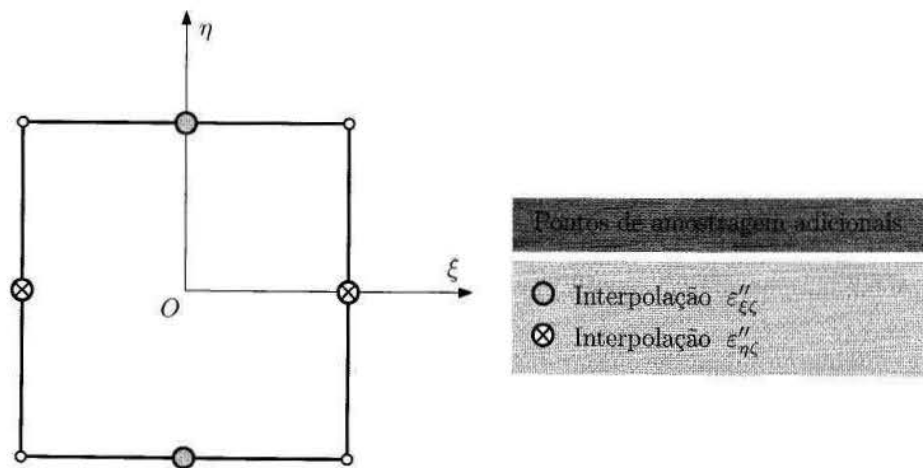


Figura 10.8 Pontos de amostragem adicionais associados à interpolação do campo de deformações do elemento finito do tipo casca linear de quatro nós.

As funções de forma adicionais adoptadas para cada um destes pontos são as seguintes:

$$\begin{cases} N_1^*(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta) \\ N_2^*(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta) \\ N_3^*(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \\ N_4^*(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \end{cases} \quad (10.58)$$

Consequentemente, o campo de deformações assumido completo para o elemento finito de quatro nós é determinado pelas expressões

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon''_{\xi\xi}|_{\text{ANS}}(\xi, \eta, \zeta) = \varepsilon''_{\xi\xi}|_{\text{D}}(\xi, \eta, \zeta) \\ \varepsilon''_{\eta\eta}|_{\text{ANS}}(\xi, \eta, \zeta) = \varepsilon''_{\eta\eta}|_{\text{D}}(\xi, \eta, \zeta) \\ \varepsilon''_{\zeta\zeta}|_{\text{ANS}}(\xi, \eta, \zeta) = \varepsilon''_{\zeta\zeta}|_{\text{D}}(\xi, \eta, \zeta) \\ \gamma''_{\xi\eta}|_{\text{ANS}} = 2 \varepsilon''_{\xi\eta}|_{\text{ANS}}(\xi, \eta, \zeta) = 2 \varepsilon''_{\xi\eta}|_{\text{D}}(\xi, \eta, \zeta) \\ \gamma''_{\xi\zeta}|_{\text{ANS}} = 2 \varepsilon''_{\xi\zeta}|_{\text{ANS}}(\xi, \eta, \zeta) = 2 \sum_{p=1}^2 N_p^*(\xi, \eta) \varepsilon''_{\xi\zeta}|_{\text{D}}(\xi_p, \eta_p, 0) \\ \gamma''_{\eta\zeta}|_{\text{ANS}} = 2 \varepsilon''_{\eta\zeta}|_{\text{ANS}}(\xi, \eta, \zeta) = 2 \sum_{p=3}^4 N_p^*(\xi, \eta) \varepsilon''_{\eta\zeta}|_{\text{D}}(\xi_p, \eta_p, 0) \end{array} \right. \quad (10.59)$$

Note-se que a interpolação dos termos de deformação fora do plano é feita sobre a superfície de referência $\zeta = 0$ independentemente da posição ao longo dessa direcção do ponto onde é calculada a deformação final assumida.

10.4.4 Elemento finito do tipo casca quadrático

Nesta secção descrevem-se as funções de interpolação e os campos de deformação assumidos para o elemento finito do tipo casca quadrático de nove nós.

Neste tipo de elemento finito curvo, os termos de deformação no plano, isto é, de deformação normal e de corte, e fora do plano, ou seja, de corte transversal, calculados directamente através do campo de deslocamentos são modificados e substituídos pelos termos de deformação assumida, utilizando a série de pontos de ligação representados na Figura 10.9.

As funções de forma adicionais adoptadas para cada um destes pontos de interpolação são as seguintes:

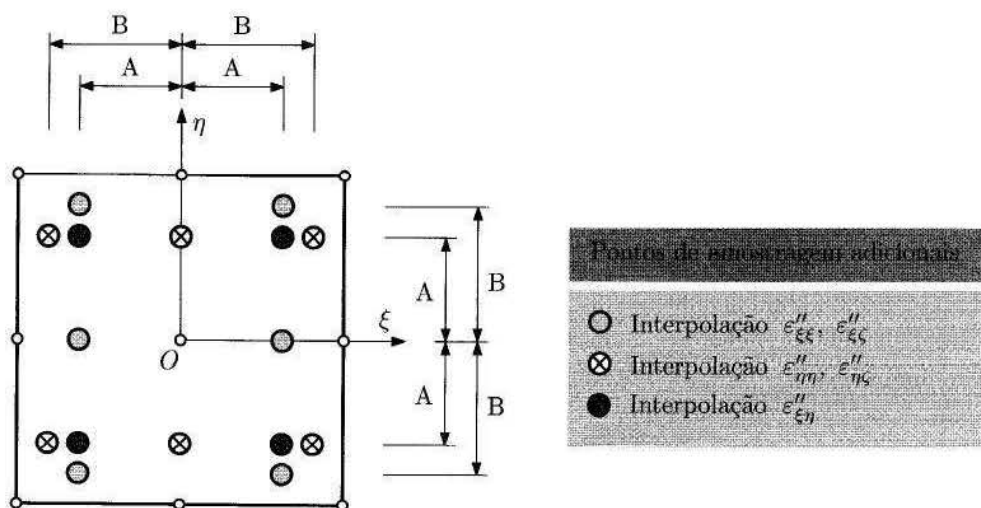


Figura 10.9 Pontos de amostragem adicionais associados à interpolação do campo de deformações do elemento finito do tipo casca quadrático de nove nós.

$$\begin{cases} N_1^*(\xi, \eta) = \frac{\eta}{4B} \left(\frac{\eta}{B} + 1 \right) \left(1 + \frac{\xi}{A} \right) \\ N_2^*(\xi, \eta) = \frac{\eta}{4B} \left(\frac{\eta}{B} + 1 \right) \left(1 - \frac{\xi}{A} \right) \\ N_3^*(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\eta^2}{B^2} \right) \left(1 + \frac{\xi}{A} \right) \\ N_4^*(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\eta^2}{B^2} \right) \left(1 - \frac{\xi}{A} \right) \end{cases}, \quad \begin{cases} N_5^*(\xi, \eta) = \frac{\eta}{4B} \left(\frac{\eta}{B} - 1 \right) \left(1 + \frac{\xi}{A} \right) \\ N_6^*(\xi, \eta) = \frac{\eta}{4B} \left(\frac{\eta}{B} - 1 \right) \left(1 - \frac{\xi}{A} \right) \\ N_7^*(\xi, \eta) = \frac{\xi}{4B} \left(\frac{\xi}{B} + 1 \right) \left(1 + \frac{\eta}{A} \right) \\ N_8^*(\xi, \eta) = \frac{\xi}{4B} \left(\frac{\xi}{B} + 1 \right) \left(1 - \frac{\eta}{A} \right) \end{cases} \quad (10.60)$$

e

$$\begin{cases} N_9^*(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{B^2} \right) \left(1 + \frac{\eta}{A} \right) \\ N_{10}^*(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{B^2} \right) \left(1 - \frac{\eta}{A} \right) \\ N_{11}^*(\xi, \eta) = \frac{\xi}{4B} \left(\frac{\xi}{B} - 1 \right) \left(1 + \frac{\eta}{A} \right) \\ N_{12}^*(\xi, \eta) = \frac{\xi}{4B} \left(\frac{\xi}{B} - 1 \right) \left(1 - \frac{\eta}{A} \right) \end{cases}, \quad \begin{cases} N_{13}^*(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\xi}{A} \right) \left(1 + \frac{\eta}{A} \right) \\ N_{14}^*(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\xi}{A} \right) \left(1 - \frac{\eta}{A} \right) \\ N_{15}^*(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\xi}{A} \right) \left(1 + \frac{\eta}{A} \right) \\ N_{16}^*(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\xi}{A} \right) \left(1 - \frac{\eta}{A} \right) \end{cases} \quad (10.61)$$

em que, nas equações anteriores e na Figura 10.9,

$$A = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{e} \quad B = \sqrt{\frac{3}{5}}. \quad (10.62)$$

Finalmente, o campo de deformações assumido completo para o elemento finito de nove nós é determinado pelas seguintes expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon''_{\xi\xi}|_{\text{ANS}}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{p=1}^6 N_p^*(\xi, \eta) \varepsilon''_{\xi\xi}|_D(\xi_p, \eta_p, \zeta) \\ \varepsilon''_{\eta\eta}|_{\text{ANS}}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{p=7}^{12} N_p^*(\xi, \eta) \varepsilon''_{\eta\eta}|_D(\xi_p, \eta_p, \zeta) \\ \varepsilon''_{\zeta\zeta}|_{\text{ANS}}(\xi, \eta, \zeta) = \varepsilon''_{\zeta\zeta}|_D(\xi, \eta, \zeta) \\ \gamma''_{\xi\eta}|_{\text{ANS}} = 2 \varepsilon''_{\xi\eta}|_{\text{ANS}}(\xi, \eta, \zeta) = 2 \sum_{p=13}^{16} N_p^*(\xi, \eta) \varepsilon''_{\xi\eta}|_D(\xi_p, \eta_p, \zeta) \\ \gamma''_{\xi\zeta}|_{\text{ANS}} = 2 \varepsilon''_{\xi\zeta}|_{\text{ANS}}(\xi, \eta, \zeta) = 2 \sum_{p=1}^6 N_p^*(\xi, \eta) \varepsilon''_{\xi\zeta}|_D(\xi_p, \eta_p, 0) \\ \gamma''_{\eta\zeta}|_{\text{ANS}} = 2 \varepsilon''_{\eta\zeta}|_{\text{ANS}}(\xi, \eta, \zeta) = 2 \sum_{p=7}^{12} N_p^*(\xi, \eta) \varepsilon''_{\eta\zeta}|_D(\xi_p, \eta_p, 0) \end{array} \right. \quad (10.63)$$

Em cada uma das expressões anteriores é necessário calcular os termos do campo de deformações que se obtêm directamente a partir do campo de deslocamentos num ponto genérico e a seguir particularizar esse resultado para um ponto concreto do elemento. Desta forma, pode ser útil sistematizar de forma explícita cada um dos termos do campo de deformações relativamente ao referencial natural do elemento finito em função dos graus de liberdade de um nó genérico k , isto é,

$$\varepsilon''_{\xi\xi}|_D = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \zeta \frac{a}{2} \frac{\partial N}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} v_{1x}^k + \frac{\partial y}{\partial \xi} v_{1y}^k + \frac{\partial z}{\partial \xi} v_{1z}^k \right) \\ -\zeta \frac{a}{2} \frac{\partial N}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} v_{2x}^k + \frac{\partial y}{\partial \xi} v_{2y}^k + \frac{\partial z}{\partial \xi} v_{2z}^k \right) \end{array} \right]_k^T \left\{ \begin{array}{c} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{array} \right\}, \quad (10.64)$$

$$\varepsilon''_{\eta\eta}|_D = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \zeta \frac{a}{2} \frac{\partial N}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} v_{1x}^k + \frac{\partial y}{\partial \eta} v_{1y}^k + \frac{\partial z}{\partial \eta} v_{1z}^k \right) \\ -\zeta \frac{a}{2} \frac{\partial N}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} v_{2x}^k + \frac{\partial y}{\partial \eta} v_{2y}^k + \frac{\partial z}{\partial \eta} v_{2z}^k \right) \end{bmatrix}_k^T \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix}, \quad (10.65)$$

$$\varepsilon''_{\zeta\zeta}|_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a}{2} N \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} v_{1x}^k + \frac{\partial y}{\partial \zeta} v_{1y}^k + \frac{\partial z}{\partial \zeta} v_{1z}^k \right) \\ -\frac{a}{2} N \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} v_{2x}^k + \frac{\partial y}{\partial \zeta} v_{2y}^k + \frac{\partial z}{\partial \zeta} v_{2z}^k \right) \end{bmatrix}_k^T \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix}, \quad (10.66)$$

$$\gamma''_{\xi\eta}|_D = 2\varepsilon''_{\xi\eta}|_D = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial N}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}_k^T \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix}, \quad (10.67)$$

$$\gamma''_{\xi\zeta}|_D = 2\varepsilon''_{\xi\zeta}|_D = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N}{\partial \zeta} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial N}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}_k^T \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix} \quad (10.68)$$

e

$$\gamma''_{\eta\zeta}|_D = 2\varepsilon''_{\eta\zeta}|_D = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N}{\partial \zeta} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial N}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ S_5 \\ S_6 \end{array} \right]_k^T \left\{ \begin{array}{c} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{array} \right\}. \quad (10.69)$$

Nas expressões anteriores

$$S_1 = \zeta \frac{a}{2} \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} v_{1x}^k + \frac{\partial y}{\partial \xi} v_{1y}^k + \frac{\partial z}{\partial \xi} v_{1z}^k \right) + \frac{\partial N}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} v_{1x}^k + \frac{\partial y}{\partial \eta} v_{1y}^k + \frac{\partial z}{\partial \eta} v_{1z}^k \right) \right], \quad (10.70)$$

$$S_2 = -\zeta \frac{a}{2} \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} v_{2x}^k + \frac{\partial y}{\partial \xi} v_{2y}^k + \frac{\partial z}{\partial \xi} v_{2z}^k \right) + \frac{\partial N}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} v_{2x}^k + \frac{\partial y}{\partial \eta} v_{2y}^k + \frac{\partial z}{\partial \eta} v_{2z}^k \right) \right], \quad (10.71)$$

$$S_3 = \frac{a}{2} \left[v_{1x}^k \left(N \frac{\partial x}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) + v_{1y}^k \left(N \frac{\partial y}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right) + v_{1z}^k \left(N \frac{\partial z}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \right], \quad (10.72)$$

$$S_4 = -\frac{a}{2} \left[v_{2x}^k \left(N \frac{\partial x}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) + v_{2y}^k \left(N \frac{\partial y}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right) + v_{2z}^k \left(N \frac{\partial z}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \right], \quad (10.73)$$

$$S_5 = \frac{a}{2} \left[v_{1x}^k \left(N \frac{\partial x}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) + v_{1y}^k \left(N \frac{\partial y}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right) + v_{1z}^k \left(N \frac{\partial z}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \right] \quad (10.74)$$

e

$$S_6 = -\frac{a}{2} \left[v_{2x}^k \left(N \frac{\partial x}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) + v_{2y}^k \left(N \frac{\partial y}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right) + v_{2z}^k \left(N \frac{\partial z}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \right]. \quad (10.75)$$

Com base nas expressões anteriores, pode determinar-se o campo de deformações relativamente ao referencial natural do elemento, baseado nos graus de liberdade nodais. Estas expressões podem ser directamente utilizadas no estudo de cascas e de placas espessas ou moderadamente espessas. No entanto, no caso de uma análise de cascas com pequena espessura torna-se necessário modificar alguns dos termos de deformação consoante o tipo de elemento recorrendo, por exemplo, às equações 10.59 ou 10.63. Nas referências indicadas no final do capítulo podem ainda encontrar-se procedimentos para elementos de ordem ainda mais elevada. O tensor das deformações modificado pode ser transformado para o referencial local do elemento, através da expressão e das matrizes utilizadas nas equações 10.47 a 10.49.

10.5 Leis constitutivas e matriz de rigidez

A partir das definições apresentadas na secção anterior e da posse do tensor das deformações ou, em alternativa, da matriz de deformações, no referencial local do elemento finito, os procedimentos para determinar o tensor das tensões no referencial local e a matriz de rigidez elementar são semelhantes aos passos básicos descritos nos Capítulos 6 a 9.

A utilização do referencial local para determinar as tensões é útil não só na imposição de que a tensão ao longo da direcção da espessura seja nula — estado plano de tensão na superfície de referência do elemento — mas também na eventual aplicação mais avançada desta formulação na modelação de materiais com leis constitutivas anisotrópicas. Nestes casos as direcções de anisotropia podem ser reproduzidas pelas direcções dos eixos locais no plano — anisotropia planar —, sendo também possível associar à direcção normal definições materiais próprias — anisotropia normal.

Revedo as equações utilizadas anteriormente na introdução ao método dos elementos finitos (Capítulo 4) para o caso particular de materiais com comportamento linear elástico, pode escrever-se uma lei constitutiva elástica relacionando os campos de tensões e de deformações no referencial local na seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \sigma_{x'y'} \\ \sigma_{x'z'} \\ \sigma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}' \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}' \boldsymbol{\varepsilon}', \quad (10.76)$$

em que intervém a matriz constitutiva $\mathbf{C}'$, também definida no referencial local do elemento e, para o caso linear elástico, função do módulo de elasticidade do material e do seu coeficiente de Poisson. A matriz constitutiva pode ser descrita directamente no referencial global externo do elemento através da transformação

$$\mathbf{C} = (\mathbf{T}_{gl})^T \mathbf{C}' \mathbf{T}_{gl}. \quad (10.77)$$

Na expressão anterior intervém a matriz de transformação do referencial global para o local, definida na equação 10.31. Adicionalmente, as tensões nos referenciais local e global podem também ser relacionadas pela mesma matriz de transformação, ou seja,

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{T}_{gl})^T \boldsymbol{\sigma}' \quad (10.78)$$

ou, ainda, na seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{T}_{gl})^T \mathbf{C}' \boldsymbol{\varepsilon}' = (\mathbf{T}_{gl})^T \mathbf{C}' \mathbf{T}_{gl} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (10.79)$$

As igualdades anteriores conduzem à interessante conclusão de que o cálculo por integração numérica da matriz de rigidez é invariante com o referencial utilizado para representar os termos constitutivos e de deformação, ou seja, de uma forma compacta a matriz de rigidez é

$$\mathbf{K} = \int_V (\mathbf{B}')^T \mathbf{C}' \mathbf{B}' dV = \int_V (\mathbf{B})^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV. \quad (10.80)$$

Problemas Propostos

Os exercícios propostos no âmbito das matérias expostas neste capítulo deverão ser resolvidos através da implementação das formulações descritas (utilizando linguagem Fortran ou C++, por exemplo), recorrendo a programas matemáticos de manipulação simbólica (Maple, Matlab, Mathematica, *etc.*) ou, ainda, através da sua implementação em folhas de cálculo.

Problema 10.1. Na Figura 10.10 encontra-se representada de forma esquemática uma placa quadrada com bordos encastrados. Por uma questão de simetria de geometria e condições de contorno, apenas um quarto da placa se encontra modelado e discretizado em quatro elementos finitos distintos, conforme mostrado na figura. A placa tem comprimento L e espessura a , e propriedades materiais elásticas definidas pelo módulo de elasticidade E e pelo coeficiente de Poisson ν .

Considera-se que a espessura da placa é reduzida, ou seja, que a relação entre o comprimento e a espessura é da ordem de $\frac{L}{t} = 1000$.

Para o caso particular em que sobre a placa actua uma carga concentrada F no seu centro (ponto C na figura), determine:

- O valor do deslocamento vertical no ponto C para uma malha regular ($\Delta = 0,0$ na figura), obtido a partir da implementação de uma formulação degenerada de sólidos clássica;
- O valor do deslocamento vertical no ponto C para uma malha regular ($\Delta = 0,0$ na figura), obtido a partir da implementação de uma formulação degenerada de sólidos, mas incluindo agora o método das deformações naturais assumidas;
- Para a formulação referida na alínea anterior, verifique a evolução do resultado obtido numericamente para o deslocamento vertical no ponto C em função do grau de distorção da malha, ou seja, para valores sucessivos do parâmetro Δ entre $0,0$ e $0,125L$.

Note-se que a solução analítica para este problema, baseada na teoria de Kirchhoff, pode ser obtida para dimensões, propriedades materiais e valores de carregamento genéricos na obra *Theory of Plates and Shells* (Timoshenko, S.P., Woinowsky-Kreiger, S., 1964).

Problema 10.2. Repita o exercício anterior, mas agora utilizando uma malha composta por um único elemento de nove nós, quer através da formulação degenerada clássica quer incluindo deformações assumidas, e verifique para esse caso a influência do posicionamento do nó interior (correspondente à posição original $0,25L \times 0,25L$) no valor dos resultados obtidos (variação do parâmetro Δ entre $0,0$ e $0,125L$ na Figura 10.10).

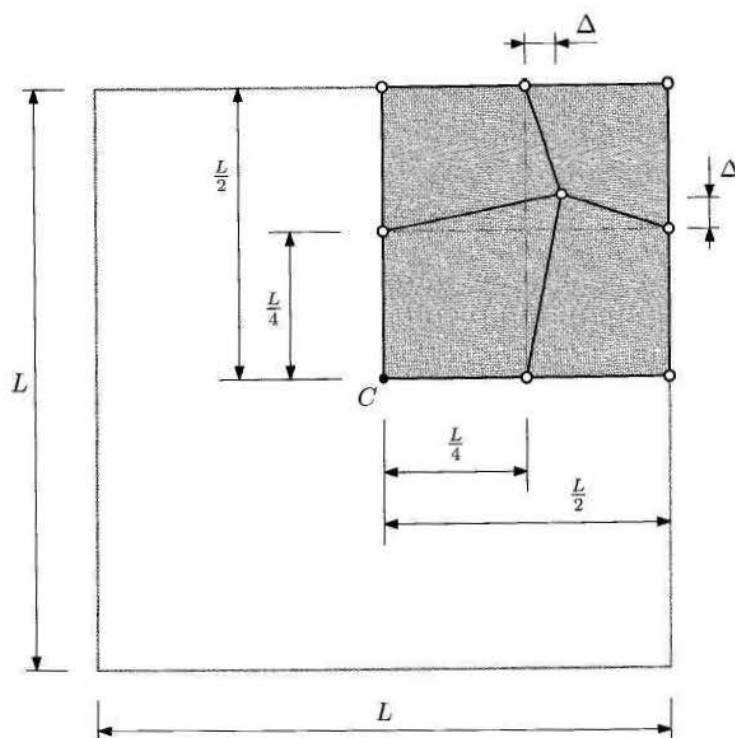


Figura 10.10 Placa encastrada nos seus bordos e sujeita a uma carga concentrada no ponto central (ponto C): representação de um quarto da estrutura, para o Exercício 10.1.

Problema 10.3. Considerando a mesma geometria, e as condições de carregamento e de contorno utilizadas nos exercícios anteriores, mas agora tendo em atenção a influência do grau de refinamento da malha na qualidade dos resultados, calcule o valor do deslocamento no ponto C da Figura 10.10 para malhas com:

- a) 2×2 elementos;
- b) 4×4 elementos;
- c) 8×8 elementos.

Compare, para malhas regulares ($\Delta = 0,0$) e elementos bilineares (com quatro nós) os resultados obtidos com elementos degenerados clássicos e incluindo deformações naturais assumidas.

Problema 10.4. Na Figura 10.11, encontra-se representada uma placa distorcida no plano e simplesmente apoiada nos seus bordos, sujeita à pressão normal sobre o seu plano de referência. Para o valor de distorção representado na figura, sabendo que as dimensões da placa são dadas por um comprimento $L = 100$ e uma espessura $t = 1$, as propriedades elásticas do material definidas por um módulo de elasticidade $E = 10^5$ e um coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, sendo o valor da pressão aplicada sobre os elementos $P = 1$, determine o valor do deslocamento no ponto central da estrutura (ponto C na Figura 10.11). A solução de referência deste problema é apresentada no texto *Skew Plates and Structures* (Morley, L.S.D., 1963) para um sistema coerente de unidades, sendo igual a 4,640.

Poderá ser interessante neste problema o leitor comparar o resultado obtido para diferentes níveis de refinamento (por exemplo, com malhas de 4×4 , 8×8 , 16×16 e 32×32 elementos), diferentes tipos de elemento (de quatro e de nove nós) e diferentes formulações de elementos do tipo placa/casca (degenerados clássicos e degenerados com deformações naturais assumidas).

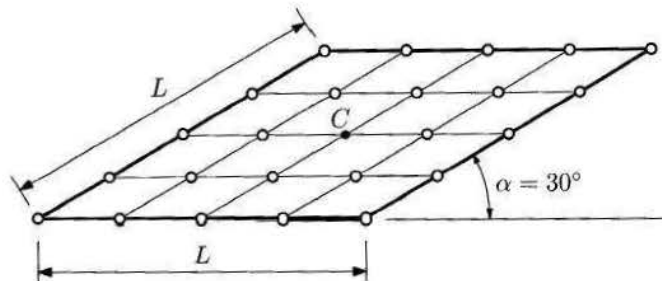


Figura 10.11 Placa enviesada e simplesmente apoiada sujeita a pressão sobre os elementos, para o Exercício 10.4.

Problema 10.5. Na Figura 10.12 está representada uma casca cilíndrica sujeita a um conjunto de duas forças concentradas opostas radialmente. Dadas as condições de simetria do problema, basta apenas construir uma malha de elementos finitos num oitavo do cilindro. As extremidades da estrutura estão sujeitas a condições de contorno que permitem apenas o deslocamento dos extremos segundo a direcção Oy , mantendo-se assim a forma circular da estrutura durante a deformação (extremidades constituídas por um diafragma rígido, mas passível de se movimentar na direcção axial).

O comprimento total do cilindro é dado por $L = 600$ e o raio por $R = 300$, enquanto a espessura é $t = 3$. O módulo de elasticidade do material do cilindro é $E = 3,0 \times 10^6$ e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,3$.

Assumindo que a carga concentrada sobre o ponto A da Figura 10.12 tem um valor nominal unitário ($F = 1$), determine o valor do deslocamento vertical nesse ponto (segundo a direcção Oz) e compare o resultado obtido com a solução de referência para uma análise linear elástica ($w = 1,825 \times 10^{-5}$). Compare, a exemplo dos exercícios anteriores, resultados numéricos obtidos com diferentes graus de refinamento da malha, tipos de elemento e formulações de elementos finitos.

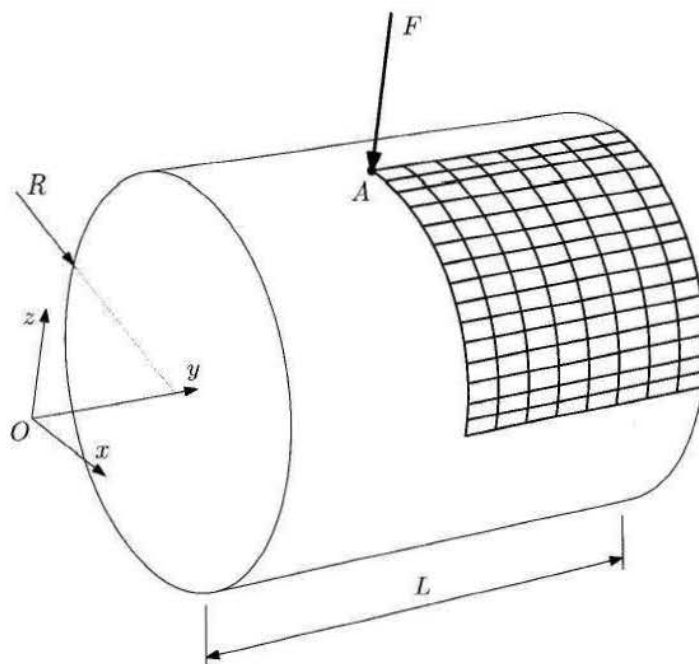


Figura 10.12 Casca cilíndrica sujeita a um par de cargas pontuais segundo a direcção radial, para o Exercício 10.5.

Referências Bibliográficas

1. Ahmad, S., Irons, B.M., Zienkiewicz, O.C. Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **2**(3):419–451, 1970.
2. Alves de Sousa, R.J., Natal Jorge, R.M., Fontes Valente, R.A., César de Sá, J.M.A. A New Volumetric and Shear Locking-Free 3D Enhanced Strain Element, *Engineering Computations* **20**(7):896–925, 2003.
3. Bathe, K.-J. *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall International Editions, Inc., Nova Jérsea, Estados Unidos da América, 1996.
4. Bathe, K.-J., Dvorkin, E.N. A Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **21**(2):367–383, 1985.
5. Bathe, K.-J., Dvorkin, E.N. A Formulaton of General Shell Elements - The Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **22**(3):697–722, 1986.
6. Belytschko, T., Tsay, C.-S. A Stabilization Procedure for the Quadrilateral Plate Element with One-Point Quadrature, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **19**(3):405–419, 1983.
7. Bucalem, M.L., Bathe, K.-J. Higher-Order MITC General Shell Elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **36**(21):3729–3754, 1993.
8. César de Sá, J.M.A., Natal Jorge, R.M., Valente, R.A.F., Areias, P.M.A. Development of Shear Locking-Free Shell Elements Using an Enhanced Assumed Strain Formulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **53**(7):1721–1750, 2002.
9. Chapelle, D., Bathe, K.-J. *The Finite Element Analysis of Shells — Fundamentals*, Computational Fluid and Solid Mechanics, Springer-Verlag, Berlim, Alemanha, 2003.
10. Chung, T.J. *General Continuum Mechanics*, 2.^a edição, Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2007.
11. Cowper, G.R. Gaussian Quadrature Formulas for Triangles, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **7**(3):405–408, 1973.
12. Fish, J., Belytschko T. *A First Course in Finite Elements*, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido, 2007.
13. Hughes, T.J.R., Cohen, M., Haroun, M. Reduced and Selective Integration Techniques in the Finite Element Analysis of Plates, *Nuclear Engineering and Design* **46**(1):203–222, 1978.
14. Mindlin, R.D. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, *Journal of Applied Mechanics* **18**(1):31–38, 1951.
15. Morley, L.S.D. *Skew Plates and Structures*, International Series of Monographs on Aeronautics and Astronautics — Division I: Solid and Structural Mechanics, Pergamon Press, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1963.
16. Oñate, E. *Structural Analysis with the Finite Element Method — Linear Statics: Beams, Plates and Shells*, Vol. 2, Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences, Springer-Verlag, Berlim, Alemanha, 2009.
17. Reddy, J.N. *An Introduction to the Finite Element Method*, 3.^a edição, McGraw-Hill, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2005.
18. Reissner, E. The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, *Journal of Applied Mechanics* **12**:69–76, 1945.

19. Simo, J.C., Armero, F., Taylor, R.L. Improved Versions of Assumed Enhanced Strain Tri-Linear Elements for 3D Finite Deformation Problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **110**(3–4):359–386, 1993.
20. Simo, J.C., Rifai, M.S. A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **29**(8):1595–1638, 1990.
21. Timoshenko, S.P., Woinowsky-Kreiger, S. *Theory of Plates and Shells*, 2.^a edição, McGraw-Hill, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1964.
22. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method — The Basis*, Vol. 1, 5.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2000.
23. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method — Solid Mechanics*, Vol. 2, 5.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2000.
24. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Too, J.M. Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **3**(2):275–290, 1971.

Resumo Neste capítulo enquadra-se o método das diferenças finitas no âmbito dos métodos de simulação numérica em engenharia. Definem-se diferenças finitas em uma dimensão e em duas dimensões. Apresentam-se as bases teóricas subjacentes à implementação do método das diferenças finitas atrás, à frente e central. Aplica-se o método das diferenças finitas a problemas de análise térmica e de análise estrutural.

11.1 Introdução

A par do método dos elementos finitos, que foi extensivamente abordado nos capítulos anteriores deste livro, o método das diferenças finitas (MDF) é também amplamente utilizado na área de projecto para cálculo de problemas complexos no âmbito da Engenharia Mecânica, da Engenharia Civil, *etc.*, sejam eles de índole térmica, tal como, por exemplo, a fundição e a transferência de calor, ou estrutural (placas, vigas, *etc.*).

Em ambos os métodos, o objectivo consiste na transformação de um conjunto de equações diferenciais e de condições de fronteira que regem um determinado fenómeno físico em meios contínuos — a já referida formulação forte de um problema (ver Capítulo 6) — num conjunto de equações algébricas de fácil resolução. Todavia, enquanto que no método dos elementos finitos a formulação forte é geralmente transformada, antes da derivação das equações discretas, na sua correspondente formulação fraca, no método das diferenças finitas as equações algébricas são obtidas directamente a partir da formulação forte do problema.

De facto, o método das diferenças finitas constitui uma das ferramentas mais antigas utilizadas em engenharia para resolução numérica de equações diferenciais de problemas típicos de estruturas ou de transmissão de calor.

O método das diferenças finitas baseia-se, também, na discretização de um meio contínuo, sendo um método simples para resolução de exercícios que possibilitem a construção de malhas regulares e uniformes. Embora seja passível de aplicação a problemas com geometrias mais complexas, este método pode tornar-se algo moroso. Por esta razão o método dos elementos finitos, ao permitir facilmente a aplicação de malhas com elementos distorcidos, é actualmente muito mais difundido que o MDF. De todo modo, o MDF é hoje em dia utilizado em diversos programas comerciais de análise de transmissão de calor, de mecânica dos fluidos e de cálculo estrutural.

O objectivo das secções seguintes é transmitir os conhecimentos básicos e introdutórios relativos ao MDF.

11.2 Diferenças finitas a uma dimensão

O método das diferenças finitas baseia-se nas propriedades da expansão de Taylor e na aplicação directa da definição da derivada de uma função num ponto, como se mostra na Figura 11.1. Conforme foi já referido, este é talvez o método mais simples para aplicação em malhas uniformes. Todavia, requer um elevado grau de regularidade da malha. Em particular, a malha deve ser criada de forma estruturada, de modo a que os pontos da malha, num espaço n -dimensional, fiquem localizados nas intersecções de n famílias de linhas rectilíneas ou curvilíneas. Estas linhas curvilíneas aparecem na forma de linhas de coordenadas numéricas e cada ponto deve depender de uma — e uma só — linha de cada família. A ideia-base do método é, portanto, relativamente simples, já que corresponde a estimar a derivada através do quociente de duas diferenças.

Para uma função genérica $u(x)$, a derivada no ponto x é definida como

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}. \quad (11.1)$$

Assim, a aproximação ao valor da derivada $\frac{du}{dx}$ é tanto melhor quanto menor o valor de Δx . Todavia, para valores finitos de Δx resultará sempre um erro de truncatura que tende para zero à medida que Δx se aproxima de zero. Expandindo o termo $u(x + \Delta x)$ em série de Taylor, obtém-se

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{d^4u}{dx^4} + \dots, \quad (11.2)$$

o que permite reescrever o quociente apresentado no segundo membro da equação 11.1 como

$$\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x}{2!} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{\Delta x^3}{4!} \frac{d^4u}{dx^4} + \dots \quad (11.3)$$

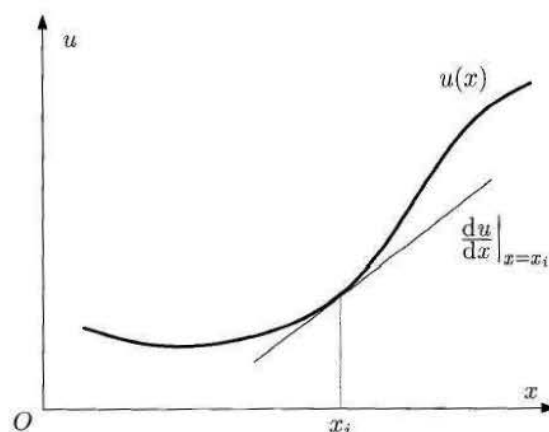


Figura 11.1 Representação esquemática da definição da derivada da função $u(x)$ no ponto x_i .

O erro de truncatura será dependente do número de termos considerados na equação 11.3 para a aproximação da derivada. O cálculo da primeira derivada da função u no ponto $x = x_i$ pode ser estimado, de acordo com a Figura 11.2, de três modos distintos:

- Utilizando o valor da função no próprio ponto x_i e no ponto x_{i-1} — a diferença finita atrás —, como se pode observar na seguinte expressão:

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x); \quad (11.4)$$

- Utilizando o valor da função no próprio ponto x_i e no ponto x_{i+1} — a diferença finita à frente —, isto é,

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x); \quad (11.5)$$

► Utilizando o valor da função no ponto x_{i-1} e no ponto x_{i+1} — a diferença finita central —, isto é,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2]. \quad (11.6)$$

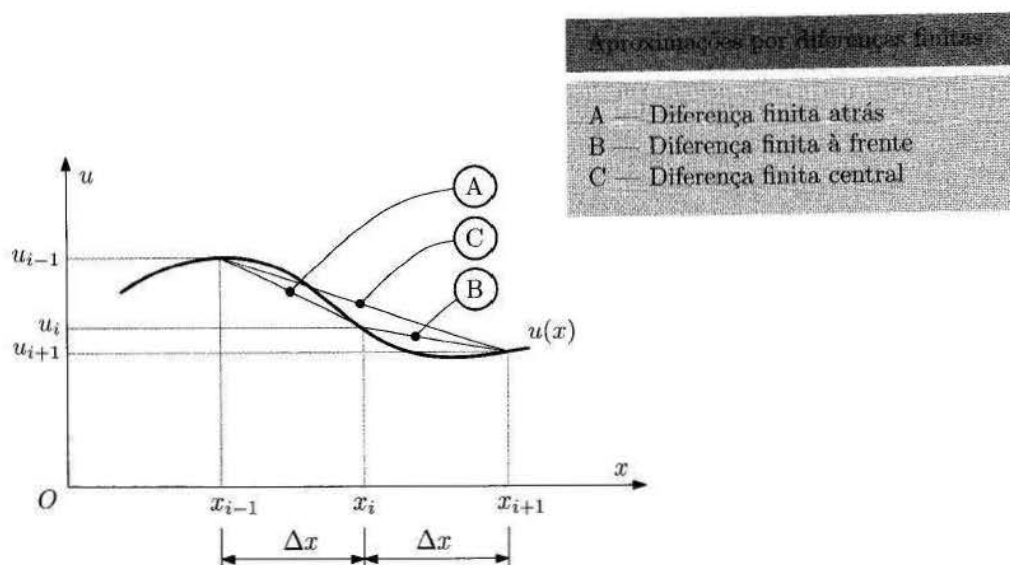


Figura 11.2 Diferenças finitas atrás, à frente e central para a aproximação da derivada da função $u(x)$ no ponto x_i .

Comparativamente às duas primeiras abordagens, a diferença finita central corresponde a um erro de truncatura menor por ser uma aproximação de segunda ordem. Adicionalmente, observando a Figura 11.2 é ainda possível inferir que a derivada da função — o declive da tangente à curva no ponto x_i — deverá em geral ser mais bem aproximada utilizando a diferença finita central.

Neste ponto é conveniente introduzir a representação gráfica das equações de diferenças finitas anteriores. Como exemplo, a diferença finita atrás pode ser representada conforme se mostra na Figura 11.3(a). A cada círculo corresponde um nó, sendo o número no seu interior o coeficiente correspondente à incógnita u desse nó. O nó representado dentro de um círculo sombreado corresponde ao nó onde se está a calcular a diferença finita. Com a representação gráfica, os problemas podem ser resolvidos de um modo sistemático e muito expedito. Todavia, as vantagens práticas desta representação serão mais visíveis com a resolução de exemplos concretos. Na Figura 11.3 representam-se ainda as formas

gráficas para as diferenças finitas unidimensionais à frente, na Figura 11.3(b), e central, na Figura 11.3(c).

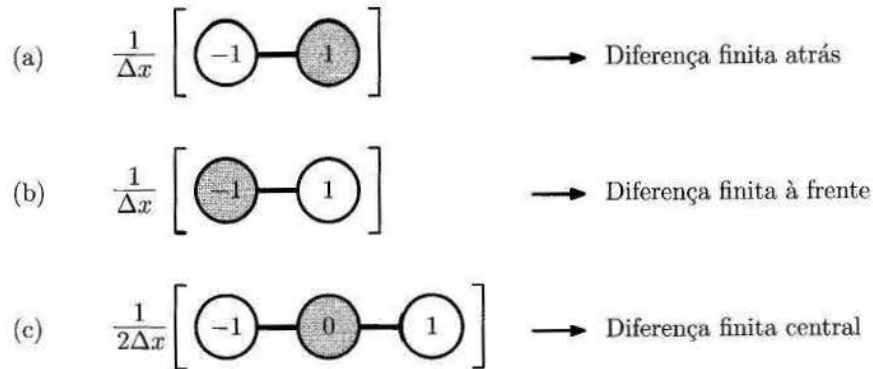


Figura 11.3 Representação esquemática das diferenças finitas (a) atrás, (b) à frente e (c) central, conforme as equações 11.4 a 11.6.

Consequentemente, as equações discretas que aproximam a equação diferencial do problema a resolver podem obter-se após o posicionamento da representação gráfica sobre uma malha de diferenças finitas, como a que se mostra na Figura 11.4. De um modo geral, a precisão dos resultados obtidos com o método das diferenças finitas pode ser controlada de duas formas distintas: (i) diminuindo o erro de truncatura associado às aproximações efectuadas ao considerar termos adicionais das expansões em série de Taylor ou (ii) mantendo a ordem das aproximações, mas diminuindo o espaçamento Δx da malha do problema (ver Figura 11.4).

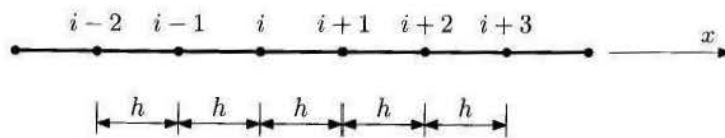


Figura 11.4 Exemplo genérico de uma malha unidimensional de diferenças finitas.

Para o primeiro caso, é possível diminuir o erro de truncatura associado às aproximações efectuadas ao considerar termos adicionais das expansões em série de Taylor, ou seja,

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_{x=x_i} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left(\frac{d^3u}{dx^3} \right)_{x=x_i} + \dots \quad (11.7)$$

e

$$u_{i+2} = u_i + 2\Delta x \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_{x=x_i} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \left(\frac{d^3u}{dx^3} \right)_{x=x_i} + \dots \quad (11.8)$$

Anulando o termo de segunda ordem com base nas duas equações anteriores e resolvendo em ordem ao termo $\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i}$, é possível obter uma expressão para a aproximação da primeira derivada com a diferença finita à frente incluindo termos de segunda ordem e, conseqüentemente, com um menor erro de truncatura, ou seja,

$$\left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2\Delta x} + \underbrace{\frac{(\Delta x)^2}{3} \left(\frac{d^3u}{dx^3} \right)_{x=x_i}}_{O[(\Delta x)^2]} + \dots \quad (11.9)$$

A forma gráfica correspondente à diferença finita apresentada na equação 11.9 é a que se mostra na Figura 11.5.

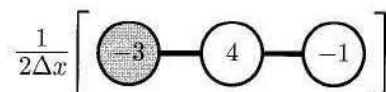


Figura 11.5 Forma gráfica para o cálculo de $\frac{du}{dx}$ com diferença finita à frente.

De modo análogo, é possível calcular a diferença finita atrás incluindo também os termos de segunda ordem, considerando-se as seguintes expressões:

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} + \frac{(-\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_{x=x_i} + \frac{(-\Delta x)^3}{3!} \left(\frac{d^3u}{dx^3} \right)_{x=x_i} + \dots \quad (11.10)$$

e

$$u_{i-2} = u_i - 2\Delta x \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} + \frac{(-2\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_{x=x_i} + \frac{(-2\Delta x)^3}{3!} \left(\frac{d^3u}{dx^3} \right)_{x=x_i} + \dots \quad (11.11)$$

Anulando o termo de segunda ordem com base nas duas equações anteriores e resolvendo ordem ao termo $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_i}$, é possível obter uma expressão para a aproximação da primeira derivada com diferença finita atrás incluindo termos de segunda ordem e, conseqüentemente, com um menor erro de truncatura, ou seja,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_i} = \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2\Delta x} + \underbrace{\frac{(\Delta x)^2}{3} \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_{x=x_i}}_{O[(\Delta x)^2]} + \dots, \quad (11.12)$$

estando a forma gráfica desta diferença finita representada na Figura 11.6.

$$\frac{1}{2\Delta x} \left[\begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \\ 1 \quad -4 \quad 3 \end{array} \right]$$

Figura 11.6 Forma gráfica para o cálculo de $\frac{du}{dx}$ com diferença finita atrás.

Note-se que a aproximação com diferença finita central calculada com a relação 11.6 possui o mesmo grau de erro de truncatura presente nas equações 11.9 e 11.12.

Para o cálculo da derivada de segunda ordem em x_i , é usual efectuar uma diferença finita central em que as derivadas de primeira ordem intervenientes são determinadas não nos pontos x_{i+1} e x_{i-1} , definindo um incremento $2\Delta x$, mas nos pontos $x_{i+\frac{1}{2}}$ e $x_{i-\frac{1}{2}}$, definindo um incremento Δx , ou seja,

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=x_i} = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_{i+\frac{1}{2}}} - \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_{i-\frac{1}{2}}} \right]. \quad (11.13)$$

Considerando a diferença finita central, as derivadas de primeira ordem apresentadas na equações anterior correspondem a

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (11.14)$$

e

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_{i-\frac{1}{2}}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2]. \quad (11.15)$$

Deste modo, a substituição destas equações na expressão da derivada de segunda ordem resulta em

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=x_i} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2]. \quad (11.16)$$

O facto de o erro de truncatura ser quadrático pode ser facilmente verificado a partir da soma, termo a termo, das equações 11.7 e 11.10, de que resulta, após manipulação algébrica, a equação anterior. Na Figura 11.7 está representada a forma gráfica para o cálculo de $\frac{d^2u}{dx^2}$ com diferença finita central.

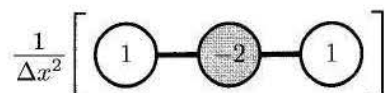


Figura 11.7 Forma gráfica para o cálculo de $\frac{d^2u}{dx^2}$ com diferença finita central.

Atenda-se ao facto de o raciocínio utilizado na determinação da derivada de segunda ordem se aplicar de modo análogo ao cálculo de derivadas de ordem superior par (não-mistas).

Por outro lado, as derivadas de ordem superior ímpar são determinadas segundo a metodologia de obtenção da primeira derivada, isto é, efectuando uma diferença central em que as derivadas de ordem inferior (par) intervenientes são determinadas nos pontos x_{i+1} e x_{i-1} , definindo um incremento $2\Delta x$. Assim, para o cálculo da derivada de terceira ordem, por exemplo, tem-se

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_{x=x_i} = \frac{1}{2\Delta x} \left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=x_{i+1}} - \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=x_{i-1}} \right], \quad (11.17)$$

que, atendendo à equação 11.16, resulta em

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_{x=x_i} = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2}}{2(\Delta x)^3} + O[(\Delta x)^2], \quad (11.18)$$

sendo possível demonstrar que o erro de truncatura associado à expressão anterior é quadrático. Na Figura 11.8 apresentam-se aproximações por diferenças finitas de derivadas de diversas ordens e correspondentes ordens de erro de truncatura.

Derivada	Forma gráfica	Erro	Interpolação
$\frac{du}{dx}$	$\frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} \textcircled{-1} & \textcircled{1} \end{bmatrix}$	$O(\Delta x)$	Atrás
	$\frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} \textcircled{-1} & \textcircled{1} \end{bmatrix}$	$O(\Delta x)$	À frente
	$\frac{1}{2\Delta x} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{-4} & \textcircled{3} \end{bmatrix}$	$O(\Delta x)^2$	Atrás
	$\frac{1}{2\Delta x} \begin{bmatrix} \textcircled{-3} & \textcircled{4} & \textcircled{-1} \end{bmatrix}$	$O(\Delta x)^2$	À frente
	$\frac{1}{2\Delta x} \begin{bmatrix} \textcircled{-1} & \textcircled{0} & \textcircled{1} \end{bmatrix}$	$O(\Delta x)^2$	Central
$\frac{d^2u}{dx^2}$	$\frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{-2} & \textcircled{1} \end{bmatrix}$	$O(\Delta x)$	Atrás
	$\frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{-2} & \textcircled{1} \end{bmatrix}$	$O(\Delta x)$	À frente
	$\frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{-2} & \textcircled{1} \end{bmatrix}$	$O(\Delta x)^2$	Central
$\frac{d^3u}{dx^3}$	$\frac{1}{(\Delta x)^3} \begin{bmatrix} \textcircled{-1} & \textcircled{3} & \textcircled{-3} & \textcircled{1} \end{bmatrix}$	$O(\Delta x)$	Atrás
	$\frac{1}{(\Delta x)^3} \begin{bmatrix} \textcircled{-1} & \textcircled{3} & \textcircled{-3} & \textcircled{1} \end{bmatrix}$	$O(\Delta x)$	À frente
	$\frac{1}{2(\Delta x)^3} \begin{bmatrix} \textcircled{-1} & \textcircled{2} & \textcircled{0} & \textcircled{-2} & \textcircled{1} \end{bmatrix}$	$O(\Delta x)^2$	Central
$\frac{d^4u}{dx^4}$	$\frac{1}{(\Delta x)^4} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{-4} & \textcircled{6} & \textcircled{-4} & \textcircled{1} \end{bmatrix}$	$O(\Delta x)$	Atrás
	$\frac{1}{(\Delta x)^4} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{-4} & \textcircled{6} & \textcircled{-4} & \textcircled{1} \end{bmatrix}$	$O(\Delta x)$	À frente
	$\frac{1}{(\Delta x)^4} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{-4} & \textcircled{6} & \textcircled{-4} & \textcircled{1} \end{bmatrix}$	$O(\Delta x)^2$	Central

Figura 11.8 Aproximações por diferenças finitas de derivadas de diversas ordens e correspondentes ordens de erro de truncatura.

11.3 Método das diferenças finitas a duas dimensões

A utilização do método das diferenças finitas em casos multidimensionais alarga o campo de aplicação do método. Neste caso, a malha representada na Figura 11.4 estende-se para duas dimensões, correspondendo, a partir de agora, ao índice i a malha ao longo das linhas horizontais e ao índice j a malha ao longo das correspondentes linhas verticais, como se pode observar na Figura 11.9.

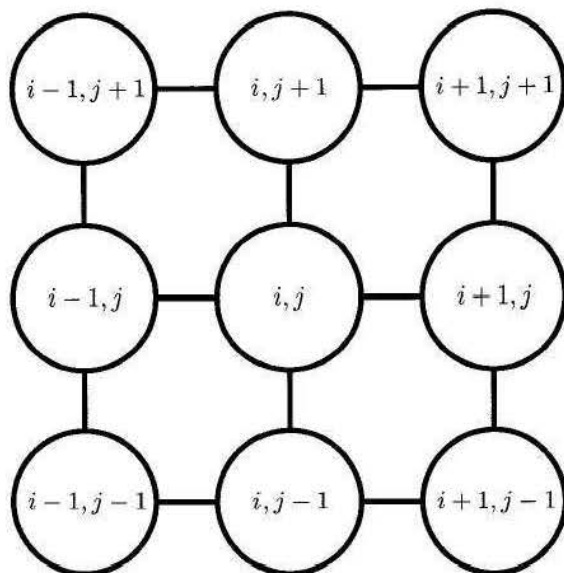


Figura 11.9 Representação esquemática de um exemplo de malha de diferenças finitas em duas dimensões.

No que se segue, a dedução das equações algébricas a partir das equações diferenciais que regem um fenómeno físico é análoga ao caso unidimensional. Por norma, os espaçamentos da malha na direcção vertical e na direcção horizontal deverão ser os mesmos, isto é, $\Delta x = \Delta y = h$. No entanto, embora seja este o caso considerado ao longo deste capítulo, nada impede que as equações de diferenças finitas sejam deduzidas com espaçamentos distintos. Para uma função genérica $u(x, y)$, apresentam-se de seguida alguns exemplos de equações de diferenças finitas para derivadas de primeira ordem:

► Diferenças finitas à frente:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y) \end{cases}; \quad (11.19)$$

► Diferenças finitas atrás:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y) \end{cases}; \quad (11.20)$$

► Diferenças finitas centrais:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + O[(\Delta y)^2] \end{cases}. \quad (11.21)$$

Refira-se que a passagem de uma para duas dimensões implica que se passem a utilizar derivadas parciais em lugar das derivadas totais da abordagem unidimensional. Saliente-se ainda que as expressões que definem o cálculo das derivadas cruzadas ou mistas de segunda ordem são as seguintes:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} = \frac{1}{2\Delta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{u_{i+1,j}} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{u_{i-1,j}} \right] \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right)_{i,j} = \frac{1}{2\Delta y} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{u_{i,j+1}} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{u_{i,j-1}} \right] \end{cases}, \quad (11.22)$$

obtendo-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right)_{i,j} \\ &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} (u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}). \end{aligned} \quad (11.23)$$

Alternativamente, as representações gráficas dos operadores de diferenciação parcial $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$ e $\frac{\partial(\cdot)}{\partial y}$ podem ser combinadas para gerar a representação gráfica das derivadas cruzadas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad (11.24)$$

conforme se mostra na Figura 11.10.

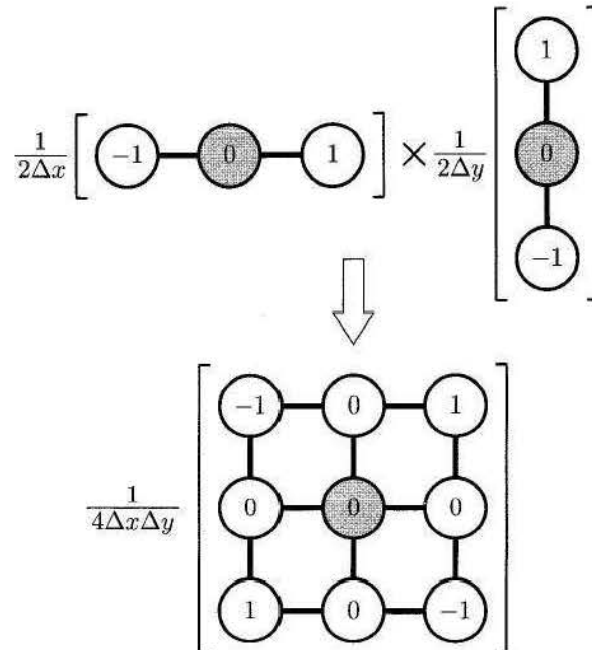


Figura 11.10 Representação gráfica em diferenças finitas centrais para as derivadas cruzadas $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Para concluir, a grande maioria dos problemas físicos a n dimensões regidos por equações diferenciais podem ser discretizados por diferenças finitas combinando as respectivas equações de diferenças finitas para cada ponto de cálculo do problema. Nas secções seguintes analisar-se-ão dois problemas bidimensionais, um de carácter térmico e outro de carácter estrutural, de modo a prover de um carácter mais prático as equações agora deduzidas.

11.3.1 Análise térmica

O caso da resolução da equação diferencial que rege a distribuição de temperatura em estado estacionário num domínio bidimensional, tal como, por exemplo, uma placa de espessura desprezável, foi já alvo de estudo em capítulos anteriores deste livro no âmbito do método dos elementos finitos.

Considere-se, por exemplo, uma placa rectangular de dimensões $45 \times 60 \text{ mm}^2$ e despreze-se a influência das propriedades térmicas do material. Esta placa está sujeita a um conjunto de temperaturas prescritas, conforme se mostra na Figura 11.11. A distribuição de temperaturas no interior da placa rege-se, de forma aproximada, pela equação de Laplace, ou seja,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (11.25)$$

Esta equação, que é uma das mais simples equações diferenciais parciais elípticas, permite também descrever problemas de escoamento em estado estacionário e problemas de distribuição de tensões em estado estacionário.

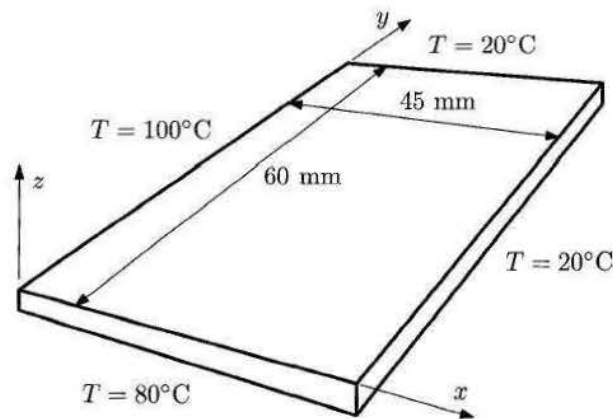


Figura 11.11 Placa de espessura desprezável com temperaturas prescritas ao longo da sua fronteira.

Para exemplificar a aplicação do método das diferenças finitas, recorre-se a uma malha pouco refinada e aplicam-se diferenças finitas centrais, com erros de truncatura de segunda ordem. Naturalmente, um maior refinamento da malha ou a diminuição do erro de truncatura resultam em resultados mais fiáveis. Uma vez que as dimensões da placa são $45 \times 60 \text{ mm}^2$, escolhe-se um espaçamento $\Delta x = \Delta y = 15 \text{ mm}$. Consequentemente, obtêm-se seis nós interiores

cujas temperaturas são as incógnitas do problema, como se pode observar na Figura 11.12.

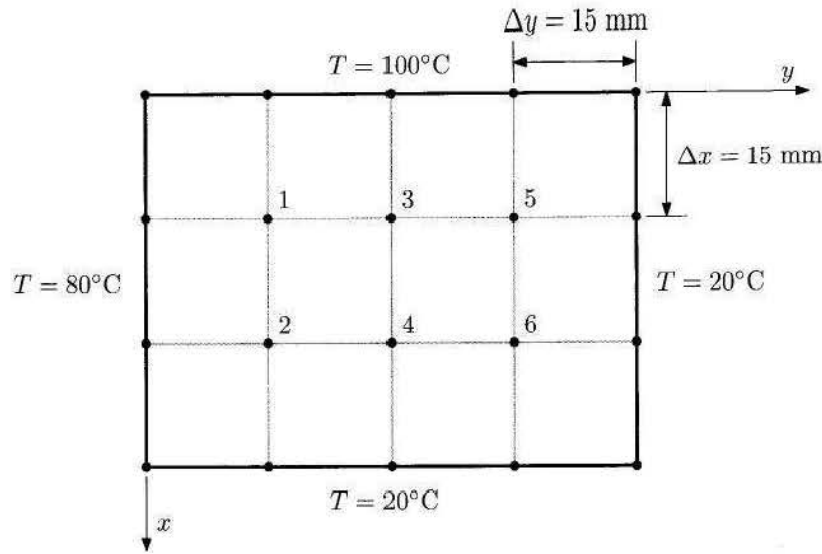


Figura 11.12 Malha de diferenças finitas considerada para o cálculo da distribuição de temperatura.

Desenvolvendo as expressões para os dois termos da equação 11.25 envolvendo derivadas parciais de segunda ordem e desprezando os correspondentes erros de truncatura, obtém-se

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \\ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \end{cases} \quad (11.26)$$

Consequentemente, a equação 11.25 pode ser reescrita como

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} = 0. \quad (11.27)$$

Particularizando para o caso corrente em que $\Delta x = \Delta y$, chega-se a

$$T_{i-1,j} + T_{i+1,j} - 4T_{i,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} = 0. \quad (11.28)$$

Assim, a forma gráfica correspondente, utilizada para realizar todos os passos da resolução do exercício, é a que se mostra na Figura 11.13.

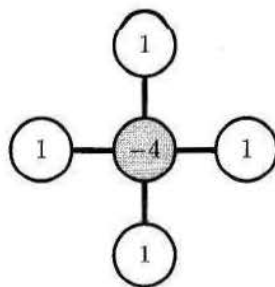


Figura 11.13 Representação gráfica em diferenças finitas correspondente ao primeiro membro da equação 11.28.

Para determinar cada uma das incógnitas do problema, isto é, o valor da temperatura nos seis nós interiores da placa, a forma gráfica da Figura 11.13 deverá ser posicionada sobre a malha de diferenças finitas, gerando um sistema de seis equações a seis incógnitas. Atendendo à representação da Figura 11.14, para o nó 1 obtém-se a seguinte equação:

$$-4T_1 + T_2 + T_3 + 80 + 100 = 0. \quad (11.29)$$

Aplicando o mesmo raciocínio aos restantes nós internos do problema obtém-se o seguinte sistema de seis equações a seis incógnitas:

$$\begin{cases} \text{Nó 1} \Rightarrow -4T_1 + T_2 + T_3 + 80 + 100 = 0 \\ \text{Nó 2} \Rightarrow -4T_2 + T_1 + 20 + 80 + T_4 = 0 \\ \text{Nó 3} \Rightarrow -4T_3 + T_4 + T_5 + T_1 + 100 = 0 \\ \text{Nó 4} \Rightarrow -4T_4 + T_3 + 20 + T_6 + T_2 = 0 \\ \text{Nó 5} \Rightarrow -4T_5 + T_6 + 100 + T_3 + 20 = 0 \\ \text{Nó 6} \Rightarrow -4T_6 + T_5 + 20 + 20 + T_4 = 0 \end{cases} \quad (11.30)$$

Depois de resolvido este sistema de equações, obtém-se a solução final para o problema térmico, isto é,

$$\begin{cases} T_1 = 76,15^\circ\text{C} \\ T_2 = 55,28^\circ\text{C} \\ T_3 = 69,32^\circ\text{C} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} T_4 = 44,97^\circ\text{C} \\ T_5 = 56,15^\circ\text{C} \\ T_6 = 35,28^\circ\text{C} \end{cases} \quad (11.31)$$

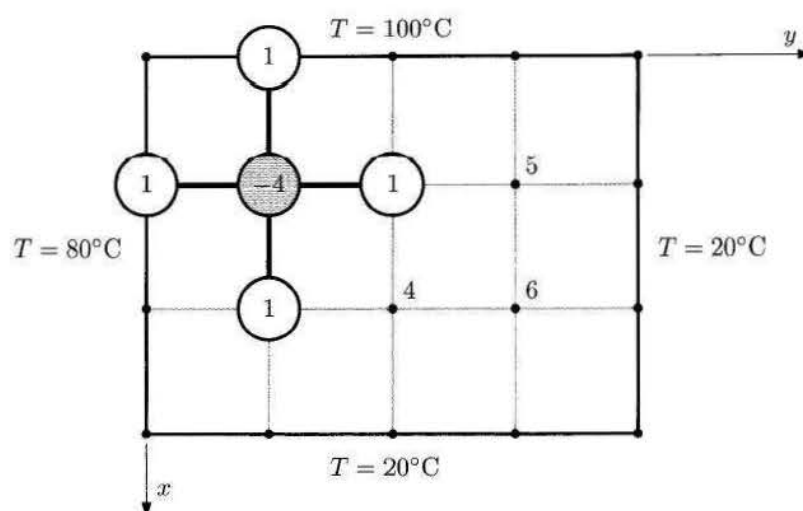


Figura 11.14 Posicionamento da representação gráfica em diferenças finitas sobre um dos nós interiores do problema.

Em termos gráficos, a distribuição da temperatura segue o gradiente expectável, com descida acentuada da temperatura entre as fronteiras em que $T = 100^{\circ}\text{C}$ e $T = 20^{\circ}\text{C}$, tal como se mostra na Figura 11.15. Todavia, deve salientar-se que estes resultados nada mais são do que uma rudimentar aproximação à realidade, devido ao facto de se ter utilizado uma malha bastante grosseira.

11.3.2 Análise estrutural

No âmbito do cálculo estrutural propõe-se um exercício que consiste na aplicação do método das diferenças finitas ao cálculo dos deslocamentos verticais (deflexões) w de uma placa fina rectangular simplesmente apoiada nos bordos, tal como se mostra na Figura 11.16, com dimensões $4 \times 2 \times 0,1 \text{ m}^3$ e sujeita a uma carga distribuída $q = 10 \text{ kNm}^{-2}$ na direcção perpendicular à placa. A placa é constituída por um aço estrutural genérico, isto é, com $E = 210 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$.

A equação diferencial com a qual é possível calcular o deslocamento vertical ou deflexão w é uma equação diferencial de quarta ordem, conhecida como a equação de Lagrange, que tem a seguinte forma:

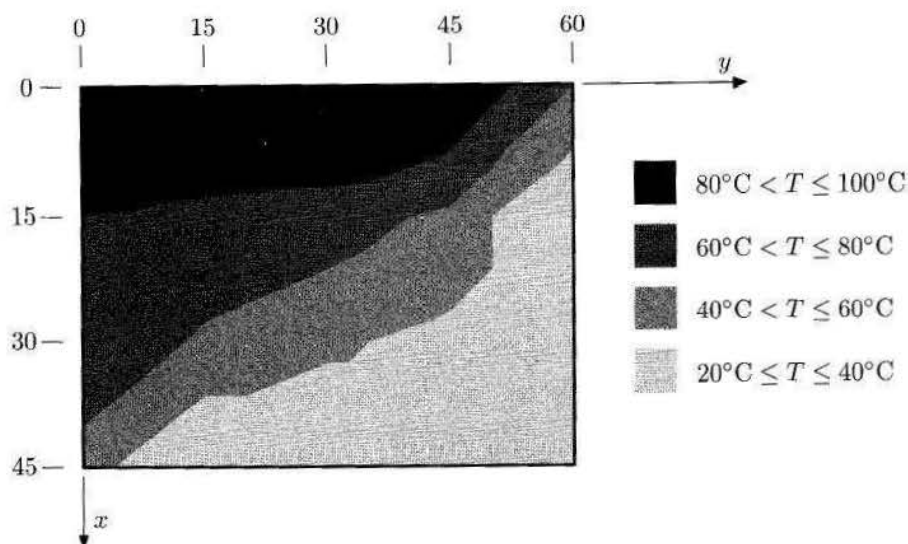


Figura 11.15 Distribuição de temperatura no domínio da placa, como resultado da análise por diferenças finitas.

$$\frac{q(x, y)}{D} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}, \quad (11.32)$$

em que

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (11.33)$$

representa a rigidez à flexão da placa, correspondendo t à sua espessura. Sendo este um exemplo demonstrativo, recorre-se a uma malha relativamente grosseira para resolver o exercício. Os espaçamentos vertical e horizontal são considerados iguais, ou seja, $\Delta x = \Delta y = h = 0,5$ m, tal como representado na Figura 11.17. Desta forma obtém-se uma malha regular e estruturada. As condições de simetria da placa são também consideradas, pelo que se utiliza apenas um quarto da placa no modelo a estudar, delimitado na Figura 11.17 pelo corte A-A.

Torna-se assim necessário transpor a equação diferencial 11.32 para um esquema de diferenças finitas apropriado. Assim, recorrendo às expressões deduzidas nas secções anteriores deste capítulo, cada termo da equação é analisado separadamente. Para as derivadas parciais de quarta ordem, as diferenças finitas centrais correspondem, de acordo com a Figura 11.18, a

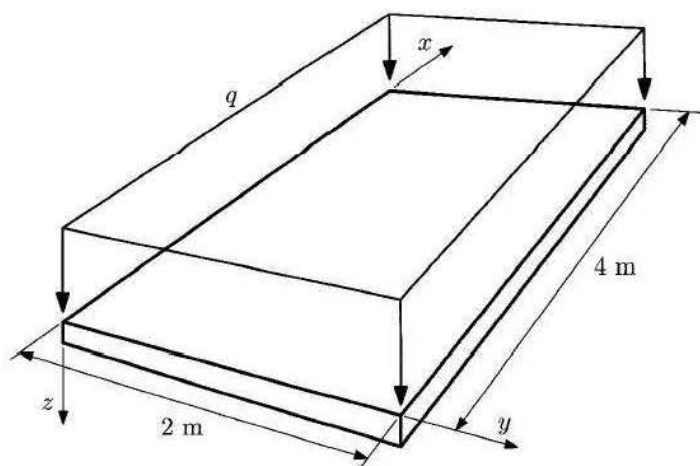


Figura 11.16 Placa fina rectangular simplesmente apoiada nos bordos e carga distribuída aplicada.

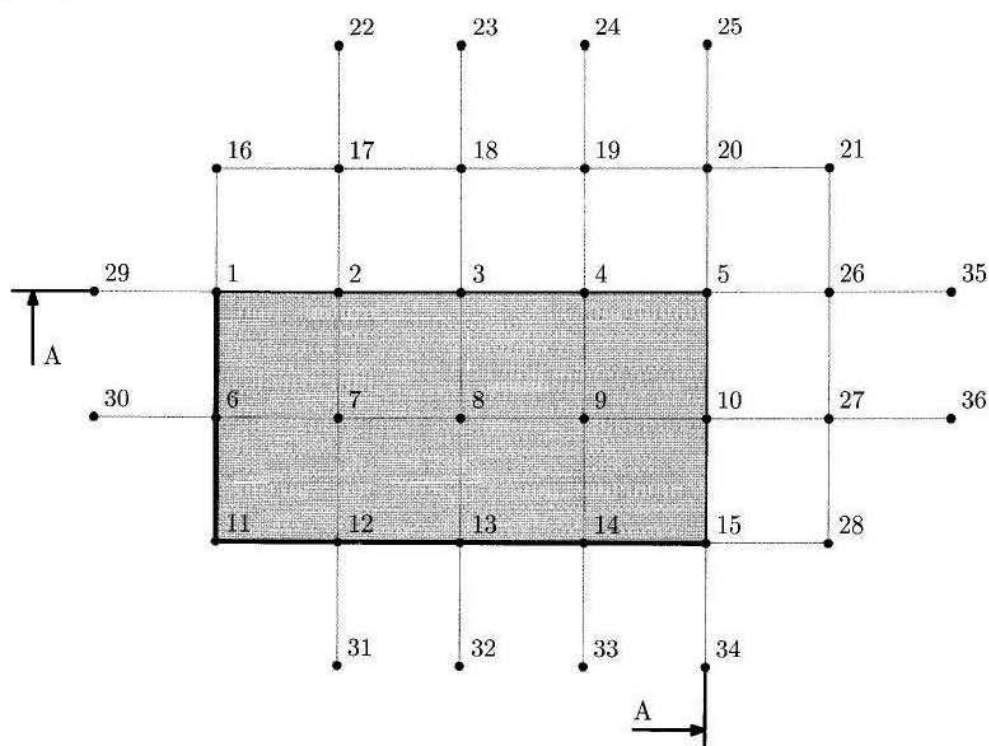


Figura 11.17 Representação da malha de diferenças finitas aplicada a um quarto da placa e respectiva numeração dos nós, incluindo os virtuais.

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{w_{i-2,j} - 4w_{i-1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i+1,j} + w_{i+2,j}}{h^4} \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{w_{i,j-2} - 4w_{i,j-1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j+1} + w_{i,j+2}}{h^4} \end{cases} \quad (11.34)$$

Estas derivadas parciais de quarta ordem estão representadas graficamente na Figura 11.18.

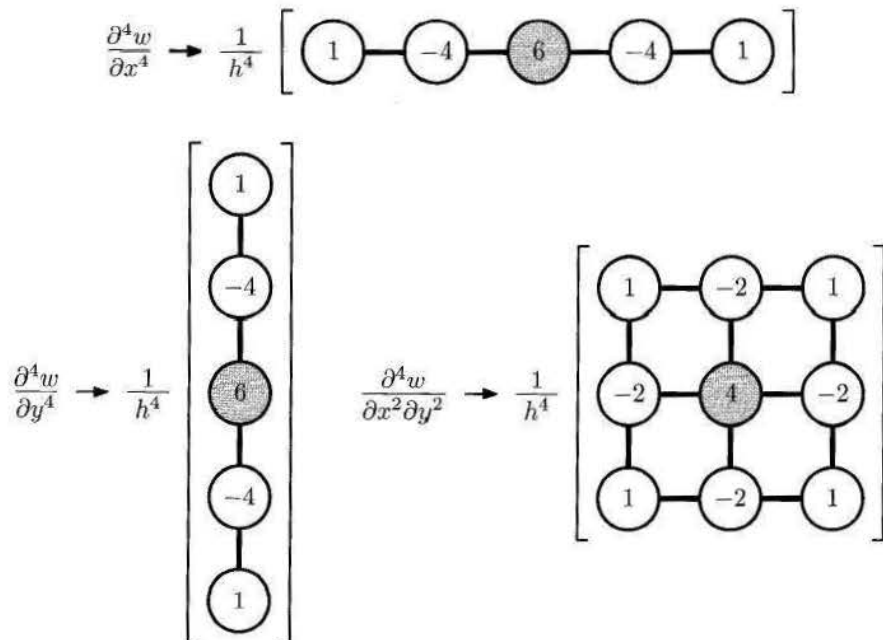


Figura 11.18 Representação gráfica em diferenças finitas centrais dos termos $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ e $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$.

Se as derivadas $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ e $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ são obtidas de modo directo, o mesmo não se pode dizer da derivada cruzada $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$. Tendo em conta que

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (11.35)$$

pode determinar-se que

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{w_{i-1,j-1} - 2w_{i,j-1} + w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j} + 4w_{i,j+1} - 2w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i+1,j+1}}{h^4}. \quad (11.36)$$

Em termos gráficos, esta derivada está representada na Figura 11.18, sendo possível imaginar e efectuar uma multiplicação gráfica entre os termos respeitantes a $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$. Tal procedimento é ilustrado na Figura 11.19.

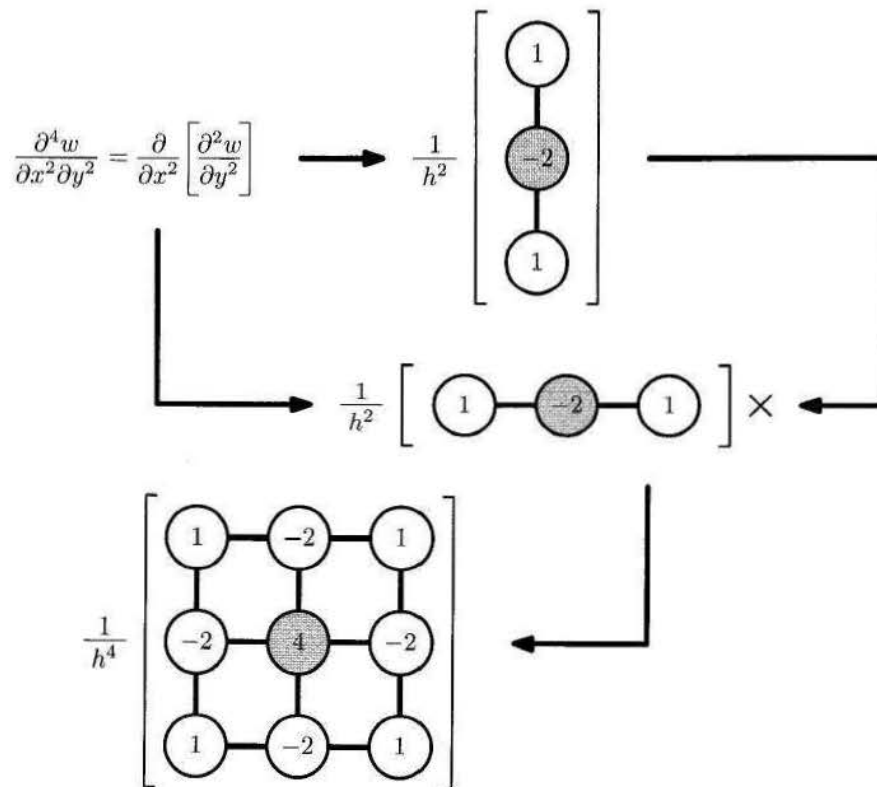


Figura 11.19 Representação gráfica em diferenças finitas centrais do procedimento de obtenção do termo $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$.

Finalmente, substituindo as aproximações de diferenças finitas dadas pelas relações 11.34 e 11.36 na equação diferencial de Lagrange 11.32, obtém-se

$$\frac{q(x, y)}{D} = \frac{20w_{i,j} - 8(w_{i-1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} + w_{i+1,j})}{h^4} + \frac{2(w_{i-1,j-1} - w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j+1})}{h^4} + \frac{(w_{i-2,j} - w_{i,j-2} + w_{i,j+2} + w_{i+2,j})}{h^4} \quad (11.37)$$

Esta relação pode ser, mais uma vez, explicitada de forma gráfica como se mostra na Figura 11.20.

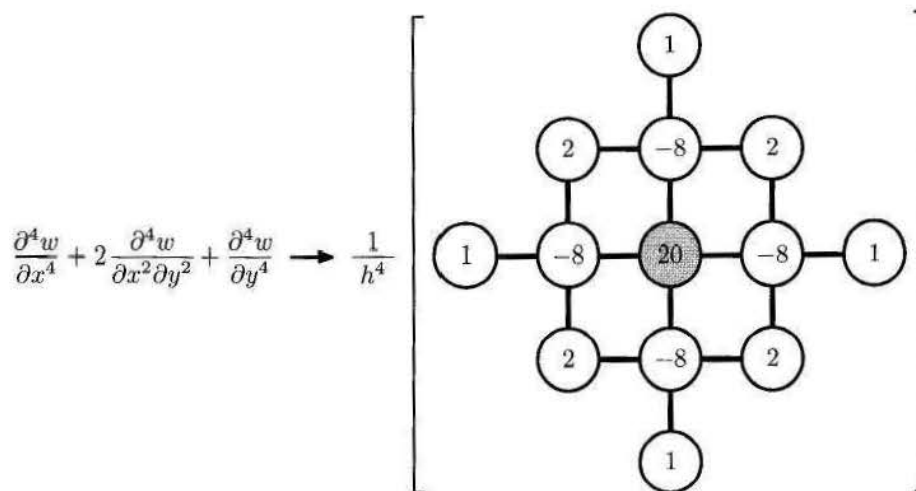


Figura 11.20 Representação gráfica da equação 11.32 recorrendo a diferenças finitas centrais.

Neste exemplo, atendendo à representação gráfica da Figura 11.17, as incógnitas do problema são os deslocamentos dos nós interiores, que neste caso são oito, ou seja, os nós 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 e 10. Assim, a representação gráfica da Figura 11.20 é posicionada nos oito nós referidos, conforme exemplificado no esquema da Figura 11.21, justificando também a necessidade da utilização de nós virtuais, fora do domínio físico da placa. No exemplo da Figura 11.21, o posicionamento sobre o nó 7 obriga, de acordo com a Figura 11.17, à criação dos nós virtuais 30 e 31.

Após o posicionamento sobre os nós que constituem as incógnitas do problema, as equações resultantes são as seguintes:

$$20w_2 - 8(w_1 + w_{17} + w_3 + w_7) + 2(w_{16} + w_{18} + w_8 + w_6) + w_{22} + w_4 + w_{12} + w_{29} = \frac{qh^4}{D}, \quad (11.38)$$

$$20w_3 - 8(w_{18} + w_4 + w_8 + w_2) + 2(w_{19} + w_9 + w_7 + w_{17}) + w_{23} + w_5 + w_{13} + w_1 = \frac{qh^4}{D}, \quad (11.39)$$

$$20w_4 - 8(w_{19} + w_5 + w_3 + w_9) + 2(w_{18} + w_{20} + w_8 + w_{10}) + w_{24} + w_{14} + w_{26} + w_2 = \frac{qh^4}{D}, \quad (11.40)$$

$$20w_5 - 8(w_{20} + w_{26} + w_{10} + w_4) + 2(w_{19} + w_{21} + w_{27} + w_9) + w_{25} + w_{15} + w_{35} + w_3 = \frac{qh^4}{D}, \quad (11.41)$$

$$20w_7 - 8(w_2 + w_{12} + w_8 + w_6) + 2(w_1 + w_3 + w_{11} + w_{13}) + w_{17} + w_9 + w_{30} + w_{31} = \frac{qh^4}{D}, \quad (11.42)$$

$$20w_8 - 8(w_3 + w_9 + w_7 + w_{13}) + 2(w_2 + w_4 + w_{12} + w_{14}) + w_6 + w_{10} + w_{18} + w_{32} = \frac{qh^4}{D}, \quad (11.43)$$

$$20w_9 - 8(w_4 + w_8 + w_{10} + w_{14}) + 2(w_3 + w_5 + w_{13} + w_{15}) + w_7 + w_{19} + w_{27} + w_{33} = \frac{qh^4}{D} \quad (11.44)$$

e

$$20w_{10} - 8(w_5 + w_9 + w_{15} + w_{27}) + 2(w_4 + w_{14} + w_{28} + w_{26}) + w_{20} + w_{34} + w_{36} + w_8 = \frac{qh^4}{D}. \quad (11.45)$$

Para determinar os deslocamentos nos restantes nós representados na malha da Figura 11.17, três condições de fronteira distintas devem ser consideradas.

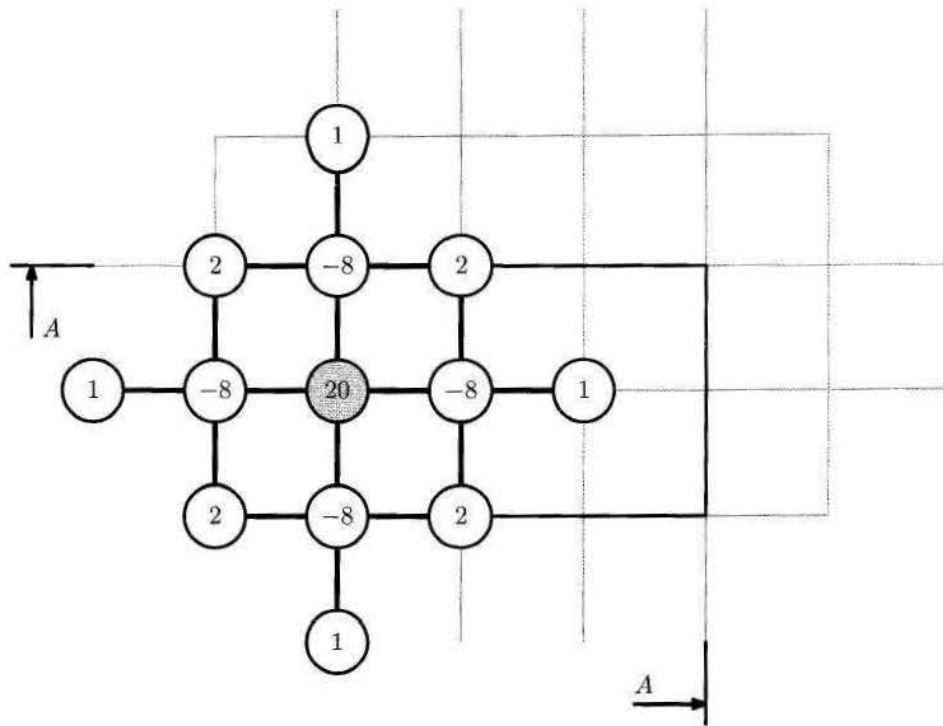


Figura 11.21 Posicionamento da representação gráfica 11.20 sobre um dos nós interiores da placa e consequente necessidade de criação de nós virtuais.

Estas condições, representadas na Figura 11.22 para um corte definido por um plano a meio vão, são as seguintes:

- Nós localizados nos pontos de apoio da placa: deslocamento nulo;
- Nós localizados além da linha de simetria da placa: deslocamento numericamente igual ao do nó situado à mesma distância aquém da linha de simetria;
- Nós virtuais localizados além dos apoios da placa: deslocamento numericamente igual, mas de sinal contrário, ao do nó situado à mesma distância aquém dos apoios da placa.

Aplicando estas condições ao problema em estudo, determinam-se as equações adicionais necessárias para o cálculo das incógnitas nodais, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = w_6 = w_{11} = w_{12} = w_{13} = w_{14} = 0 \\ w_{15} = w_{16} = w_{22} = w_{23} = w_{24} = w_{25} = w_{28} = 0 \\ w_2 = -w_{29} \\ w_3 = w_{35} \\ w_4 = w_{26} \\ w_7 = w_{17} = -w_{30} = -w_{31} \\ w_8 = w_{18} = -w_{32} = w_{36} \\ w_9 = w_{19} = w_{21} = w_{27} = -w_{33} \\ w_{10} = w_{20} = -w_{34} \end{array} \right. \quad (11.46)$$

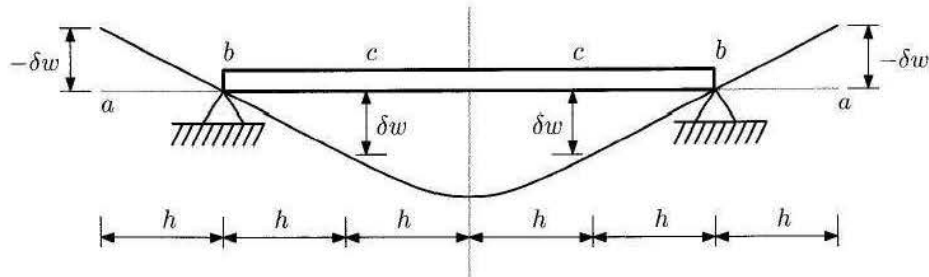


Figura 11.22 Condições de fronteira consideradas no problema da placa simplesmente apoiada carregada com uma carga distribuída.

Finalmente, resolvendo o sistema de equações definido pelas expressões 11.38 e 11.46, obtêm-se os seguintes deslocamentos para o domínio avaliado:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_2 = 3,89 \times 10^{-5} \text{ m} \\ w_3 = 6,61 \times 10^{-5} \text{ m} \\ w_4 = 8,12 \times 10^{-5} \text{ m} \\ w_5 = 8,60 \times 10^{-5} \text{ m} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} w_7 = 2,81 \times 10^{-5} \text{ m} \\ w_8 = 4,75 \times 10^{-5} \text{ m} \\ w_9 = 5,82 \times 10^{-5} \text{ m} \\ w_{10} = 6,16 \times 10^{-5} \text{ m} \end{array} \right. , \quad (11.47)$$

em que $w_5 = 8,60 \times 10^{-5} \text{ m}$ é o deslocamento vertical máximo, no centro da placa.

O resultado obtido através das teorias clássicas de placas e cascas é $w_{\max} = 8,39 \times 10^{-5} \text{ m}$. Consequentemente, o erro obtido com esta aproximação pelo método das diferenças finitas é inferior a 3%, o que dá uma boa ideia das capacidades deste método para a resolução deste género de problemas estruturais em regime linear elástico.

Problemas Propostos

Problema 11.1. Resolva a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \varphi = 0$$

no domínio $]0, 1[$, considerando as seguintes condições de fronteira:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow \varphi = 0 \\ x = 1 \rightarrow \varphi = 1 \end{cases}.$$

Compare o valor obtido no ponto $x = 0,5$ para os espaçamentos $\Delta x = 0,5$ e $\Delta x = 0,25$.

Problema 11.2. Repita o exercício de transmissão de calor abordado na Secção 11.3.1, mas utilizando um espaçamento $\Delta x = \Delta y = 7,5$ mm. Dada a quantidade de cálculos envolvidos, recomenda-se a utilização de uma folha de cálculo para a resolução deste exercício. Compare os erros relativos dos valores nodais obtidos na Secção 11.3.1 com os da sua resolução.

Problema 11.3. Calcule o campo de deslocamentos de uma placa de alumínio de dimensões $6 \times 6 \times 0,1$ m³ encastrada em todos os seus bordos. Admita um espaçamento $\Delta x = \Delta y = h = 0,25$ mm. Considere que o módulo de elasticidade do material é $E = 70$ GPa e o coeficiente de Poisson é $\nu = 0,33$. Considere os deslocamentos simétricos em relação aos bordos.

Problema 11.4. Um hipotético fenómeno físico a duas dimensões é regido pela seguinte equação diferencial da função $G(x, y)$:

$$R = \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} + 5 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial^4 G}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

Deduza a representação gráfica em diferenças finitas centrais para a equação diferencial em causa.

Problema 11.5. A placa com um rasgo representada na Figura 11.23 possui condições de fronteira distintas ao longo dos seus bordos, isto é, de temperatura prescrita, de fluxo prescrita e de bordo adiabático. Utilizando a equação de Laplace (ver relação 11.25) e um espaçamento de malha adequado, determine o gradiente de temperatura na placa.

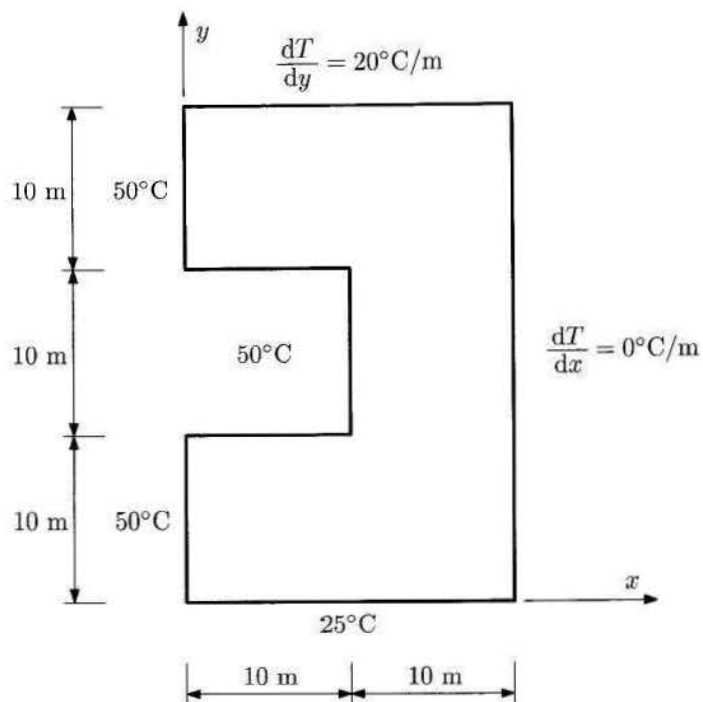


Figura 11.23 Placa com rasgo sujeita a condições de fronteira de transmissão de calor.

Problema 11.6. A distribuição do momento flector $M(x)$ numa viga com carga distribuída satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q(x).$$

Para uma viga de comprimento $L = 8$, simplesmente apoiada nas extremidades, isto é, onde $M(x) = 0$, e sujeita a uma carga $q(x) = 12x$, determine a distribui-

ção de momentos utilizando o método das diferenças finitas, recorrendo a uma malha com espaçamento $\Delta x = 1$.

Referências Bibliográficas

1. Forsythe, G.E., Wasow, W.R. *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1960.
2. Lewis, R.W., Morgan, K., Thomas, H.R., Seetharamu, K.N. *The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis*, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido, 1996.
3. Zienkiewicz, O.C., Morgan, K. *Finite Elements and Approximation*, John Wiley & Sons, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1983.

Resumo Neste capítulo apresentam-se os tipos fundamentais de não-linearidades, tais como, a não-linearidade material, a não-linearidade geométrica e as não-linearidades nas condições de fronteira. Descrevem-se as principais condições que justificam a execução de uma análise não-linear aquando da modelação numérica do comportamento mecânico de materiais por elementos finitos. Abordam-se algumas particularidades das não-linearidades, bem como os principais aspectos associados à modelação de análises não-lineares. Apresentam-se dois exemplos detalhados de modelação não-linear, envolvendo nomeadamente a elastoplasticidade infinitesimal quase-estática e a condução transitória de calor.

12.1 Enquadramento

Nos capítulos anteriores foram apresentadas formulações de elementos finitos aplicadas a meios contínuos uni-, bi- e tridimensionais. Em cada um destes casos, foram definidas as aproximações numéricas respectivas com base em considerações acerca de graus de liberdade, matrizes de rigidez e vectores de solicitações externas, quer ao nível elementar quer ao nível global. Em comum a todas essas formulações e abordagens, destaca-se a hipótese de a análise do problema em causa ser compatível com uma aproximação linear, ao nível quer da amplitude de deslocamentos e deformações quer do comportamento (assumido elástico) dos materiais, bem como por se admitir implicitamente a invariância das condições de fronteira durante a análise.

No presente capítulo, pretende-se estender os conceitos de análise a situações em que é expectável a ocorrência de fenómenos ditos não-lineares, de modo a que a aproximação por elementos finitos a ser desenvolvida possa ter em conta e reproduzir o efeito desses fenómenos. Não se pretende efectuar uma abordagem exaustiva dos fenómenos não-lineares, mas sim fornecer ao leitor interessado fundamentos básicos neste domínio, de modo a servir de primeira fonte de consulta antes de um possível estudo mais pormenorizado que pode ser efectuado recorrendo, por exemplo, às referências indicadas no final do capítulo.

12.2 Introdução

As estruturas podem apresentar, em termos gerais, três tipos distintos de comportamento:

- ▶ Estático;
- ▶ Quase-estático;
- ▶ Dinâmico.

Em geral, no caso do carregamento não variar com o tempo ou do tempo de aplicação gradual da carga ser suficientemente grande, de modo às acelerações desenvolvidas na estrutura serem suficientemente pequenas para poderem ser desprezadas, diz-se que o comportamento é do tipo estático. Por outro lado, no caso do carregamento variar com o tempo não se tem necessariamente um problema dinâmico. De facto, na circunstância de se ter um carregamento cíclico de baixa frequência, as acelerações (cíclicas) serão baixas, podendo ser desprezadas. Neste caso, o efeito da inércia do sistema é desprezável e a sua resposta varia com o tempo como se fosse um problema estático, pelo que se denomina este tipo de problema de quase-estático. Por fim, quando as frequências de carregamento são significativas, o efeito das forças de inércia não é desprezável, sendo então o problema de natureza dinâmica. Neste contexto, há dois tipos principais de problema de natureza dinâmica: (i) o de propagação de ondas e (ii) o de dinâmica estrutural. O problema de propagação de ondas encontra-se associado a situações de impacto ou de explosão, caracterizadas por fenómenos temporais de altas frequências e curtos períodos de duração de análise. Por outro lado, o problema de dinâmica estrutural corresponde a situações em que as frequências de excitação são da ordem da primeira frequência natural do sistema.

12.3 Análise não-linear: Por que razão?

Na resolução de problemas de engenharia é usual proceder-se, pelo menos em primeira aproximação, a análises do tipo linear. No contexto da estática em mecânica estrutural isto corresponde a assumir uma relação linear entre forças e deslocamentos, o que em termos de equação numérica e no âmbito do método dos elementos finitos se traduz na relação $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u}$, como se constatou em capítulos anteriores. Em termos unidimensionais, por exemplo, esta lei modela, de acordo com o ilustrado na Figura 12.1, uma relação de proporcionalidade directa entre a força F aplicada a uma mola de rigidez K e o deslocamento u que sofre a sua extremidade livre, isto é,

$$F = Ku. \quad (12.1)$$

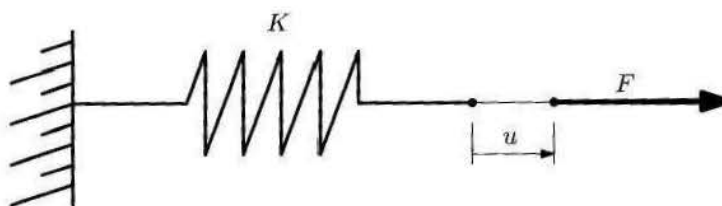


Figura 12.1 Representação esquemática de um sistema mecânico constituído por uma mola linear.

A linearidade da relação $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u}$ significa que a aplicação de um múltiplo real do vector de forças, $\beta\mathbf{F}$, ao sistema estrutural se traduz na obtenção do mesmo múltiplo para o vector de deslocamentos, $\beta\mathbf{u}$. No entanto, atenda-se ao facto de que a relação $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u}$ tem por base a consideração das três hipóteses seguintes:

- Os deslocamentos que induzem deformação são infinitesimais;
- O material tem comportamento linear elástico;
- As condições de fronteira mantêm-se constantes aquando da aplicação do carregamento.

O facto de se considerarem deslocamentos infinitesimais prende-se com o facto de não só a matriz de rigidez $\mathbf{K}$ e o vector de forças $\mathbf{F}$ serem obtidos a partir de integrações no volume definido originalmente pelos elementos finitos mas também por se considerarem matrizes elementares $\mathbf{B}^e$, associadas às relações deformações-deslocamentos que, como se viu em capítulos anteriores, são inde-

pendentes dos deslocamentos de cada um dos elementos. A consideração de um material linear elástico corresponde à adopção da lei de Hooke para o comportamento do material, o que se traduz na constância da matriz de elasticidade D . Por fim, a consideração de condições de fronteira constantes traduz-se na independência, em relação ao vector de deslocamentos nodais u , dos valores prescritos quer de força, $\bar{t}$, quer de deslocamento, $\bar{u}$.

No entanto, nas situações do dia-a-dia, os fenómenos físicos apresentam geralmente características não-lineares pelo que, tal como se verá, a relação $F \neq Ku$ corresponde à regra geral e não à excepção.

12.4 Análises não-lineares e não-linearidades

12.4.1 Tipos de não-linearidade

Embora na generalidade das situações práticas se possa proceder, como primeira aproximação, à realização de uma análise linear por elementos finitos, a ocorrência de fenómenos, tais como, por exemplo, a alteração significativa de uma geometria durante o processo de deformação de um modelo em estudo, a fendilhação, a cedência de um material e a encurvadura, encontram-se associados a comportamentos de carácter não-linear. Em termos mecânicos, e ao contrário do que foi assumido como hipótese até este momento, tem-se que, nestas situações, os valores de tensão não são directamente proporcionais aos valores de deformação, correspondendo a existência de não-linearidades num dado problema a um maior grau de complexidade relativamente a um problema linear. Em particular, deixa de ser válido o princípio da sobreposição dos efeitos, não sendo então possível obter os valores resultantes de deflexão, de tensão ou de deformação num determinado ponto de um corpo no qual actuam várias forças a partir da sobreposição (soma algébrica) dos efeitos da actuação isolada de cada uma das referidas forças. Além disso, a resposta de um sistema passa a depender e ser influenciada pela sequência temporal (história) da carga nele aplicada.

Embora a presunção de linearidade possa, por vezes, resultar numa aproximação razoável do comportamento de um determinado sistema físico, na generalidade das vezes os resultados obtidos revelam-se erróneos. Assim, a consideração de não-linearidades numa análise depende da exactidão requerida para a resposta de um sistema. Atenda-se, no entanto, ao facto de, em certas ocasiões, a análise não-linear ser a única opção adequada ao estudo de um dado problema.

Os três tipos principais das características não-lineares dos fenómenos físicos correspondem a:

- Não-linearidade material: elasticidade não-linear, plasticidade, fluência, *etc.*;
- Não-linearidade geométrica: grandes deslocamentos, grandes deformações e grandes rotações;
- Não-linearidade nas condições de fronteira: contacto, fundação elástica, *etc.*

Estes três tipos de não-linearidade podem ser considerados num dado problema de forma isolada ou simultaneamente, e são seguidamente ilustrados através de exemplos concretos.

12.4.2 Não-linearidade material

Considere-se uma barra que se encontra fixa nas suas extremidades e isenta de forças internas, conforme representado na Figura 12.2. A barra tem um comprimento $2l$ e uma área de secção transversal A . As duas semibarras de comprimento l , representadas na figura, são constituídas por dois tipos de aço de construção, com tensões de cedência distintas $\sigma_Y^{(1)}$ e $\sigma_Y^{(2)}$, sendo $|\sigma_Y^{(1)}| < |\sigma_Y^{(2)}|$, e igual módulo de elasticidade $E = E^{(1)} = E^{(2)}$. Assume-se que os dois tipos de aço de construção têm um comportamento elástico-perfeitamente plástico, isto é, não apresentam encruamento após o início do regime plástico, tal como se ilustra na Figura 12.3.

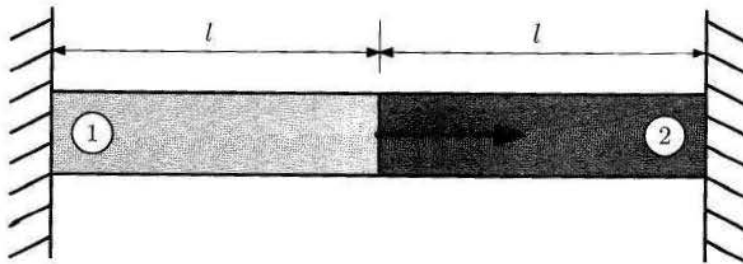


Figura 12.2 Representação esquemática de uma barra constituída por dois materiais, fixa nas suas extremidades e inicialmente isenta de forças internas.

Considere-se a aplicação de uma força $\mathbf{F}$, de intensidade F crescente, na zona de transição entre os dois materiais (a meio da barra), de acordo com a Figura 12.2. Assim, inicialmente os dois materiais comportam-se de modo linear elástico, encontrando-se o material 1 traccionado e o material 2 comprimido,

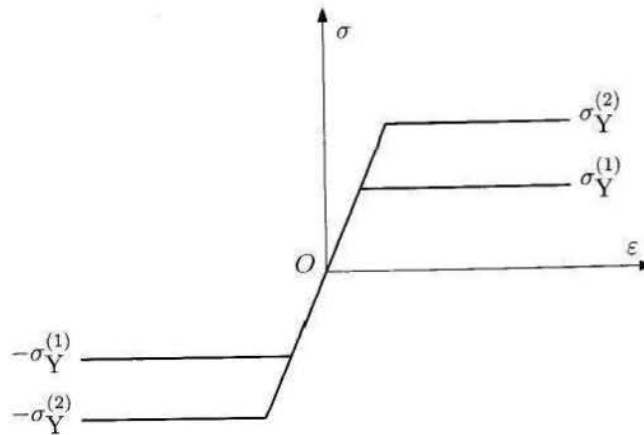


Figura 12.3 Representação esquemática do comportamento elástico-perfeitamente plástico dos dois materiais constituintes da barra.

tendo-se $F - R^{(1)} - R^{(2)} = 0$, em que $R^{(1)}$ e $R^{(2)}$ são as magnitudes das forças resistentes das semibarras 1 e 2, respectivamente. A cada uma das semibarras correspondem iguais valores de rigidez (ver Capítulo 5)

$$K_1 = K_2 = \frac{EA}{l} = K.$$

No entanto, em relação ao ponto de aplicação da força F , e no que respeita à rigidez equivalente do sistema, as duas semibarras encontram-se dispostas em paralelo, pelo que a rigidez do sistema corresponde a

$$K_T = K_1 + K_2 = \frac{2EA}{l} = 2K.$$

Deste modo, no domínio elástico o sistema apresenta uma rigidez equivalente que corresponde ao dobro do valor associado a cada uma das semibarras. Entretanto, a intensidade da carga F vai aumentando até que a barra 1 atinja a tensão de cedência $\sigma_Y^{(1)}$. Sendo o material 1 elástico-perfeitamente plástico, tem-se que após a sua cedência este não suporta qualquer incremento de tensão, pelo que a sua força resistente se mantém igual a $R^{(1)} = \sigma_Y^{(1)} A$. Neste contexto, qualquer incremento de F terá de ser equilibrado pela semibarra 2. No entanto, sendo agora nula a rigidez do elemento 1, a rigidez (tangente) do sistema corresponde a

$$K_T = K_2 = \frac{EA}{l} = K.$$

Com o subsequente aumento de F a barra 2 atinge a tensão de cedência $\sigma_Y^{(2)}$, pelo que o sistema é incapaz de suportar cargas superiores a partir deste ponto, sendo então nula a rigidez (tangente) do sistema, isto é, $K_T = 0$. Deste modo, a carga máxima corresponde a

$$F = R^{(1)} + R^{(2)} = \sigma_Y^{(1)} A + \sigma_Y^{(2)} A.$$

De acordo com o exposto, a existência de um comportamento não-linear reflecte-se no surgimento de não-linearidades no cálculo de tensões e, consequentemente, das forças resistentes das semibarras. A curva força-deslocamento ($F-u$) associada ao comportamento mecânico da barra como um todo é apresentada na Figura 12.4, em que se pode observar a ocorrência de não-linearidade de carácter material. Verifica-se que a curva é trilinear devido à cedência do material 1 — ponto a — e à cedência do material 2 — ponto b —, que corresponde ao colapso da estrutura. Realce-se o facto de o comportamento linear da estrutura corresponder ao prolongamento a traço fino a partir do ponto a .

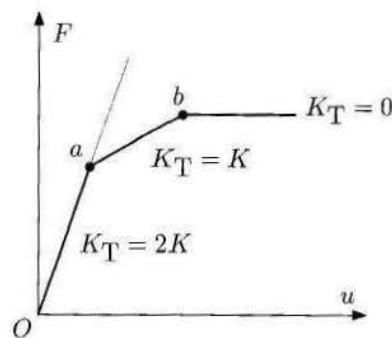


Figura 12.4 Representação esquemática da curva força-deslocamento, evidenciando a ocorrência de não-linearidade de carácter material.

12.4.3 Não-linearidade geométrica

Considere-se agora uma viga-barra que se encontra ligada numa das suas extremidades a uma mola linear de torção. A linearidade (material) de uma mola de torção reflecte-se no facto de a relação entre o momento aplicado M e o ângulo de torção α , designada rigidez à torção K_r , ser constante durante a rotação desta. A viga-barra tem um comprimento l e encontra-se sujeita a uma

força vertical de intensidade F na sua extremidade livre, tal como se ilustra na Figura 12.5.

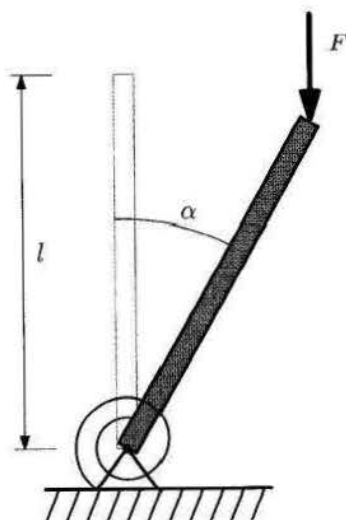


Figura 12.5 Representação esquemática do sistema constituído por uma viga-barra rígida e uma mola linear de torção.

Considerando o diagrama de corpo livre do sistema constituído pela viga-barra obtém-se, de acordo com o ilustrado na Figura 12.6, a seguinte equação de equilíbrio:

$$Fl \sin(\alpha) = K_r \alpha. \quad (12.2)$$

Por um lado, constata-se que a solução trivial desta equação corresponde a $\alpha = 0$, do que resulta que $\sin(\alpha) = 0$, obtendo-se $M = 0$. Assim, verifica-se que a solução trivial corresponde à situação em que não há qualquer rotação, pelo que a viga-barra funciona apenas à compressão. No entanto, atenda-se ao facto de este estado corresponder a um equilíbrio instável, pois qualquer solicitação de rotação, por mais pequena que seja, compromete esse equilíbrio. No caso de $\alpha \neq 0$, da equação de equilíbrio resulta que $Fl/K_r = \alpha/\sin(\alpha)$, que é não-linear em α . Por conseguinte, assumir uma solução não-trivial de carácter linear para a equação de equilíbrio deste problema corresponde a desprezar a alteração da geometria devido à actuação da força vertical de intensidade F . Em termos práticos, isto equivale a considerar que a viga-barra sofre uma rotação infinitesimal, ou seja, $\alpha \rightarrow 0$. Neste sentido, sendo

$$\sin(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots, \quad (12.3)$$

a hipótese de linearidade geométrica corresponde a considerar que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\alpha^2}{3!} + \frac{\alpha^4}{5!} - \dots \right) = 1. \quad (12.4)$$

Deste modo, conclui-se que a solução linear da equação de equilíbrio corresponde a

$$\frac{Fl}{K_r} = 1. \quad (12.5)$$

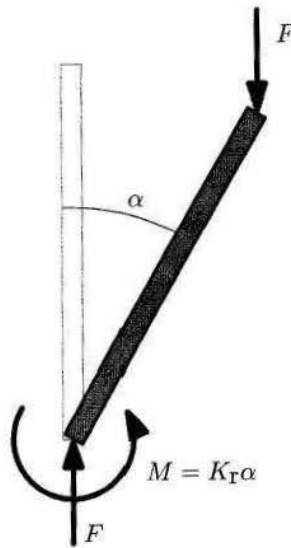


Figura 12.6 Diagrama de corpo livre do sistema constituído por uma viga-barra rígida e uma mola linear de torção.

Na Figura 12.7 são apresentados os diferentes tipos de solução: a solução trivial, a solução linear e a solução não-linear. Realce-se o facto de, ao contrário do que ocorre na solução não-linear, a solução linear ser independente de α , coincidindo estas unicamente no ponto a , definido por $\alpha = 0$. Assim, constata-se que a solução linear só é válida numa vizinhança infinitesimal do ponto $\alpha = 0$. Além disso, tem-se que a resolução do problema entrando em consideração com a não-linearidade geométrica corresponde à reunião da solução trivial com a solução não-linear. Deste modo, verifica-se que se $Fl/K_r \leq 1$ obtém-se uma

única solução, mas se $Fl/K_r > 1$ obtêm-se três soluções. A transição entre estes dois tipos de comportamento ocorre no ponto a , pelo que este é usualmente denominado ponto de bifurcação. Por outro lado, a resolução do problema assumindo linearidade geométrica corresponde à reunião da solução trivial com a solução linear. Neste caso, verifica-se que se obtém uma única solução no caso de $Fl/K_r \neq 1$ e uma infinidade de soluções se $Fl/K_r = 1$, sendo apenas correcta uma desta infinidade de soluções.

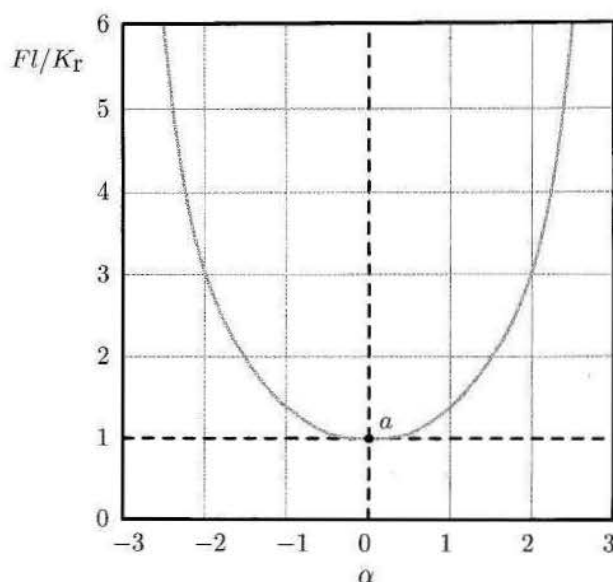


Figura 12.7 Representação esquemática da resposta do sistema: a solução trivial (traço descontinuo vertical), a solução linear (traço descontinuo horizontal) e a solução não-linear (a cinzento).

12.4.4 Não-linearidade nas condições de fronteira

Considere-se uma barra com um comprimento $2l_i$ e uma área de secção transversal A , constituída por um material linear elástico com módulo de elasticidade E . Uma das extremidades da barra está fixa a uma superfície externa, encontrando-se a outra extremidade apenas encostada a outra superfície externa, tal como se ilustra na Figura 12.8.

Com base na movimentação e posterior fixação da superfície de encosto, a extremidade livre da barra é sujeita a um deslocamento $2u_0 \ll 2l_i$, o que provoca

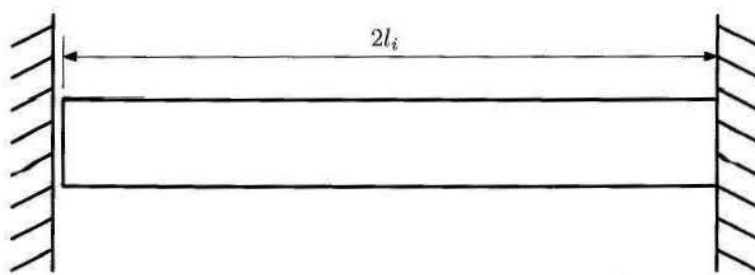


Figura 12.8 Representação esquemática de uma barra com uma extremidade fixa a uma superfície externa (extremidade direita), encontrando-se a outra extremidade apenas encostada na outra superfície externa (extremidade esquerda).

o encurtamento da barra para um comprimento $2l_f = 2l_i - 2u_0 \approx 2l_i$. Deste modo, toda a barra se encontra sujeita a um estado de compressão originado pelo encurtamento $2u_0$, a que, sendo $l_i \approx l_f$, corresponde uma força de compressão

$$F_c = \frac{EA(2u_0)}{(2l_i)} = Ku_0$$

actuante nas secções transversais da barra. Após a barra se encontrar comprimida entre as duas superfícies, procede-se à aplicação a meio do seu comprimento, no ponto P, de uma força F de intensidade F crescente, tal como se ilustra na Figura 12.9.

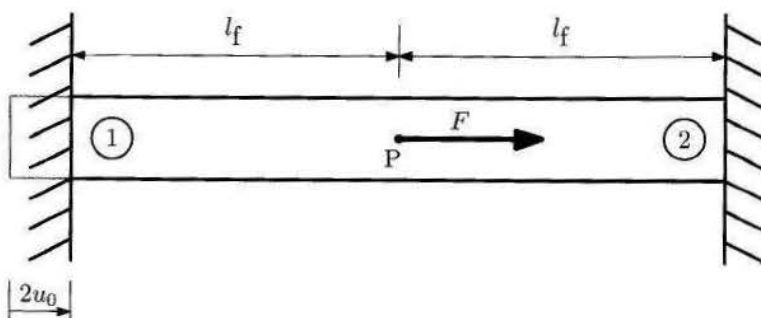


Figura 12.9 Representação esquemática da barra sujeita a um estado de compressão e com uma força aplicada a meio do seu comprimento.

Atendendo a que, em relação ao ponto P de aplicação da carga, as duas semibarras representadas na Figura 12.9 se encontram dispostas em paralelo, a rigidez do sistema corresponde a

$$K_T = K_1 + K_2 = \frac{2EA}{l_i} = 2K.$$

Assim, a aplicação da carga F no ponto P resulta na diminuição da solicitação de compressão na semibarra 1 e, pelo contrário, no aumento da solicitação de compressão na semibarra 2. As duas semibarras funcionam em paralelo até que a força interna na semibarra 1 se anule, pois nesta situação é eliminado o contacto entre a extremidade livre da barra e a superfície fixa de encosto, o que resulta em

$$K_T = K_2 = EA/l_i = K.$$

Este fenómeno ocorre quando o deslocamento do ponto P atinge o valor $u_P = u_0$, ficando então a semibarra 1 livre de quaisquer deformações e deslocando-se como se de um corpo rígido se tratasse. Na Figura 12.10 são apresentados esquematicamente, para o ponto P , a evolução do deslocamento u_P com a força aplicada, onde a não-linearidade da resposta se deve ao efeito da alteração da condição de fronteira. A evolução das forças de compressão F_c de ambas as semibarras com o deslocamento u_P é apresentada na Figura 12.11. Refira-se que o comportamento linear estrutural, associado a uma situação em que ambas as extremidades da barra se encontram fixas, é definido pelo prolongamento a traço fino, na Figura 12.10, a partir do ponto a . No entanto, registre-se que a não-linearidade estrutural advém unicamente do comportamento da semibarra 1, comportando-se a semibarra 2 sempre de modo linear, conforme se ilustra na Figura 12.11. Por fim, verifica-se, de acordo com as Figuras 12.10 e 12.11, que (i) se $u_P \leq u_0$, então as duas semibarras encontram-se comprimidas, sendo $F + R^{(1)} - R^{(2)} = 0$, e (ii) se $u_P > u_0$, então a semibarra 1 encontra-se livre de esforços e a semibarra 2 encontra-se comprimida, com $F - R^{(2)} = 0$, sendo $R^{(1)}$ e $R^{(2)}$ as amplitudes das forças resistentes das semibarras 1 e 2, respectivamente.

12.4.5 Tipos de análise não-linear

Embora a ilustração dos três tipos de não-linearidade tenha sido efectuada separadamente com base em três exemplos, deve atender-se ao facto de diversos tipos de não-linearidade poderem coexistir num determinado fenómeno físico. Em termos práticos, torna-se necessário proceder a uma análise não-linear sempre que se verificar, pelo menos, uma das condições que se apresentam nos pontos seguintes.

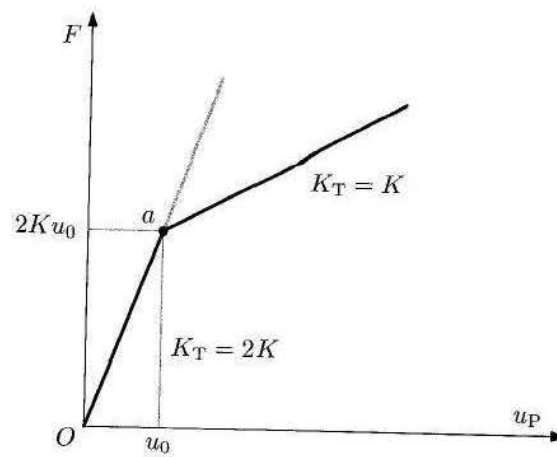


Figura 12.10 Representação esquemática da resposta do sistema devido à não-linearidade na condição de fronteira.

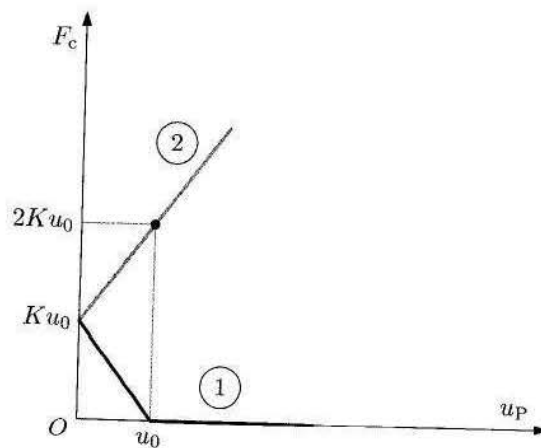


Figura 12.11 Representação esquemática da evolução das forças de compressão em cada uma das semibarras 1 e 2.

Condição I

A relação entre tensão e deformação deixa de ser linear. Este caso corresponde à ocorrência de não-linearidade material, sendo este fenómeno típico da maioria quer dos materiais metálicos (elastoplasticidade) quer das borrachas (elasticidade não-linear). Os diferentes tipos de não-linearidade material podem ser estáticos, quase-estáticos ou dinâmicos.

Exemplos de não-linearidade material estática/quase-estática consistem na plasticidade (metais dúcteis) e na elasticidade não-linear (elastómeros). Por outro lado, a fluência (betão e metais a alta temperatura), a viscoelasticidade (elastómeros e vidro) e a viscoplasticidade (metais) são exemplos de não-linearidade material dinâmica.

Condição II

A equação de equilíbrio tem de ser actualizada durante o processo que se estuda. Este facto pode dever-se, por exemplo, à ocorrência de não-linearidade geométrica por grandes deslocamentos, visto neste caso a equação de equilíbrio ter sido inicialmente definida com base na geometria original da estrutura que pode, entretanto, sofrer alterações significativas durante o período de análise.

Condição III

A relação entre deformação e deslocamento deixa de ser linear. Este tipo de não-linearidade geométrica ocorre para grandes deformações ou mesmo para pequenas deformações no caso de se verificarem grandes rotações. Neste caso torna-se necessário recorrer à adopção de grandezas da mecânica não-linear. Em particular, a utilização dos valores nominais (de engenharia) de deformação e de tensão revela-se inapropriada devido às alterações geométricas, devendo utilizar-se valores adequados para a deformação e a tensão, tais como, por exemplo, a deformação logarítmica e a tensão de Cauchy.

Condição IV

Os valores numéricos das deformações deixam de ser insignificantes, isto é, são bastante superiores à unidade, o que corresponde a grandes deformações. De facto, embora as deformações a que a maioria das estruturas metálicas são submetidas se revelem insignificantes (geralmente inferiores a cerca de 2%), verifica-se que há alguns materiais, tais como, por exemplo, a borracha, que podem sofrer deformações bastante superiores a 100% sem que ocorra a sua ruptura.

Condição V

As condições de fronteira alteram-se durante o processo de deformação, de forma quase-estática — tal como, por exemplo, em processos tecnológicos de conformação plástica ou estampagem — ou de forma dinâmica — tal como, por exemplo, em impacto estrutural ou balística.

De acordo com o que foi referido, tem-se que as análises não-lineares podem ser subdivididas, de um modo geral, com base no tipo de grandes transformações (grandes deslocamentos, grandes rotações ou grandes deformações) que se encontrem associadas ao problema em questão. Assim, numa situação em que se verifique unicamente não-linearidade material (transformações infinitesimais) podem utilizar-se os valores nominais de deformação e de tensão. Na Figura 12.12 procede-se à representação esquemática de uma análise associada a um comportamento com não-linearidade material (elastoplasticidade bilinear).

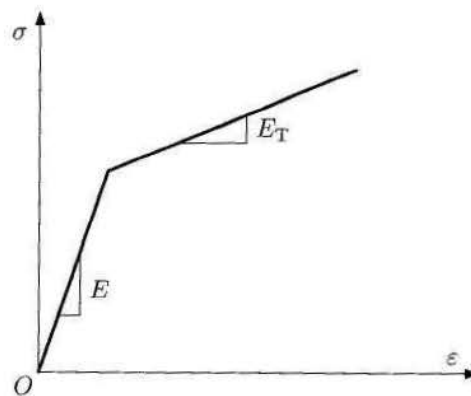


Figura 12.12 Representação esquemática de uma análise associada a um comportamento com não-linearidade material.

Por outro lado, no caso de ocorrerem não-linearidades ao nível geométrico podem definir-se diferentes tipos de análise. Assim, pode proceder-se a uma análise considerando grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas (infinitesimais) deformações associadas ou não a um comportamento material não-linear, tal como se ilustra na Figura 12.13. Todavia, o tipo de análise mais geral corresponde à consideração de grandes deformações na situação anterior, tal como se mostra na Figura 12.14.

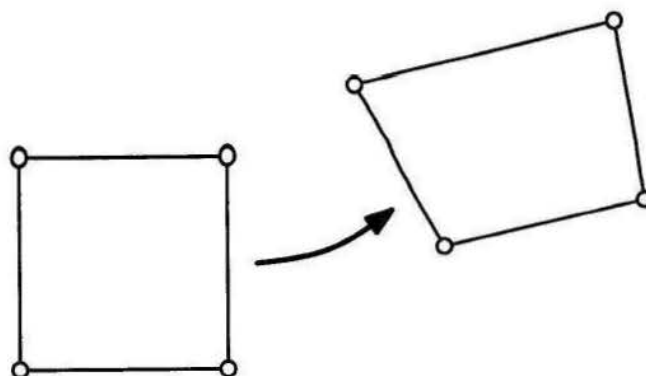


Figura 12.13 Representação esquemática de não-linearidade geométrica — grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações.

Refira-se ainda que a não-linearidade nas condições de fronteira pode surgir em qualquer uma das situações anteriormente referidas, constituindo um acréscimo da complexidade da análise. Na Figura 12.15 ilustra-se a não-linearidade nas condições de fronteira devido à existência de uma fundação elástica num determinado ponto de uma estrutura.

De acordo com o que foi já referido, a existência de não-linearidades resulta em não se ter uma proporcionalidade directa entre forças e deslocamentos: $\mathbf{F} \neq \mathbf{K}\mathbf{u}$. Deste modo, tal como se verá no decorrer deste capítulo, é usual recorrer-se à utilização de procedimentos incrementais-iterativos para se obter a solução de um problema não-linear.

12.5 Particularidades das não-linearidades

12.5.1 Não-linearidade material estática/quase-estática: Elastoplasticidade

Um dos fenómenos de uso mais frequente em mecânica estrutural associados à não-linearidade material é a elastoplasticidade. Em termos gerais, um material elastoplástico caracteriza-se por, a partir de um determinado nível de tensão aplicada, sofrer deformações de natureza irreversível (plasticidade). Assim, o comportamento do material é elástico até ao limite elástico, a que corresponde a tensão de cedência σ_Y , após o qual o material apresenta deformação plástica. No caso da tensão de cedência se manter invariável, o material apresenta um comportamento perfeitamente plástico. No caso do valor da tensão de cedência

aumentar com o desenvolvimento de deformação plástica diz-se que o material sofre encruamento.

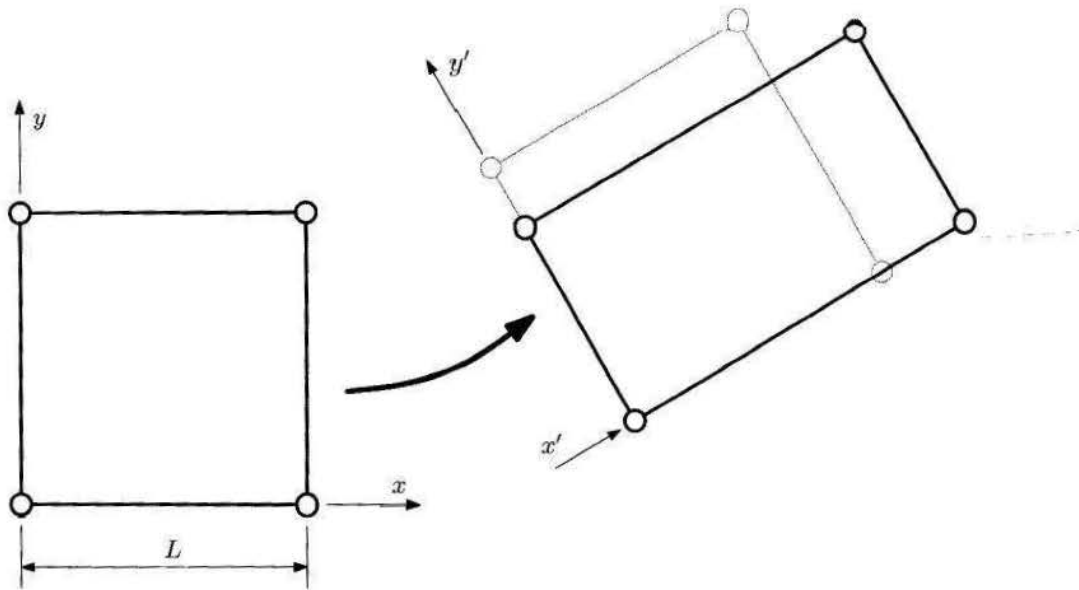


Figura 12.14 Representação esquemática de não-linearidade geométrica — grandes deslocamentos, grandes rotações e grandes deformações.

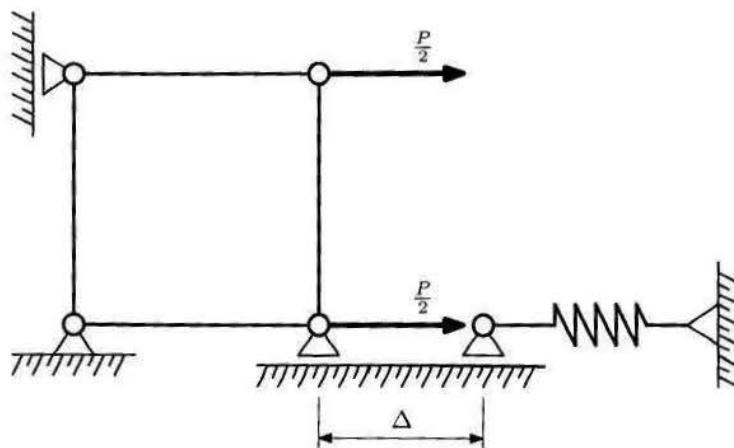


Figura 12.15 Representação esquemática de não-linearidade nas condições de fronteira — existência de fundação elástica.

Com base na hipótese da linearidade geométrica (pequenas transformações), é usual assumir-se a decomposição aditiva do tensor das deformações totais ϵ nas suas componentes elástica ϵ^e e plástica ϵ^p , isto é,

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p, \quad (12.6)$$

em que as relações deformações-deslocamentos correspondem, em termos do vector de deslocamentos $\mathbf{u}$, a

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left[\text{grad}(\mathbf{u}) + [\text{grad}(\mathbf{u})]^T \right]. \quad (12.7)$$

A decomposição aditiva das deformações totais nas componentes elástica e plástica torna conveniente a definição de modelos matemáticos que traduzam, separadamente, os fenómenos físicos da elasticidade e da plasticidade. Neste contexto, o comportamento elástico é geralmente descrito pela teoria da elasticidade linear (ver Secção 6.4), correspondendo à seguinte relação constitutiva:

$$\sigma = \mathbf{D} : \epsilon^e, \quad (12.8)$$

em que σ é o tensor das tensões de Cauchy e $\mathbf{D}$ é, mais uma vez, o tensor de elasticidade. Por outro lado, o comportamento plástico é modelado com base nas seguintes entidades (que serão descritas nas secções que se seguem):

- Critério de cedência;
- Lei de encruamento;
- Lei de plasticidade;
- Condição de consistência;
- Condições de carga-descarga.

12.5.1.1 Critério de cedência

O critério de cedência é responsável pela definição não só do estado de tensão de um determinado ponto material mas também da transição entre os comportamentos elástico e plástico (superfície de limite de elasticidade). Esta transição é definida pela tensão de cedência σ_Y , cujo valor é usualmente obtido a partir de ensaios uniaxiais de tracção.

O critério de cedência de von Mises é o mais usualmente utilizado para materiais dúcteis isotrópicos. De acordo com este critério, num determinado ponto material ocorre cedência (deformação plástica) sempre que a tensão equivalente

igualar o valor da tensão de cedência σ_Y . Em termos de previsão de fenómenos de plastificação em metais dúcteis, em particular os aços, os resultados obtidos com base neste critério de cedência possuem uma boa correlação com os que se podem obter experimentalmente. Outro critério de cedência utilizado na prática é o de Tresca, no qual se admite que num determinado ponto material ocorre cedência (deformação plástica) sempre que a tensão tangencial máxima atinge o valor correspondente à tensão tangencial de cedência num ensaio uniaxial de tracção. As superfícies de cedência definidas pelos critérios de von Mises e de Tresca encontram-se esquematicamente representadas na Figura 12.16, no espaço das tensões principais.

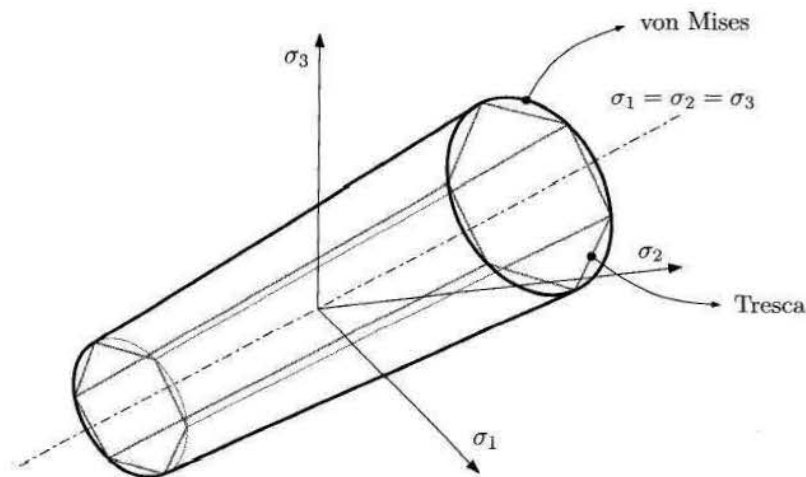


Figura 12.16 Representação esquemática das superfícies de cedência de von Mises e de Tresca.

Os critérios de von Mises e de Tresca são usualmente utilizados na modelação do comportamento de materiais em que os fenómenos de plasticidade não são influenciados pela aplicação de uma pressão hidrostática, comportamento este que se verifica para a generalidade dos materiais metálicos. No caso de materiais em que se verificam estes fenómenos, tais como certos tipos de rochas e solos, utilizam-se os critérios de Mohr-Coulomb ou de Drucker-Prager, em que a forma da superfície de limite de elasticidade depende do nível de pressão hidrostática.

12.5.1.2 Lei de encruamento

A lei de encruamento regula, assim que se inicia a deformação plástica, a evolução da superfície de limite de elasticidade de acordo com a evolução da deformação plástica, visto esta poder sofrer contínuas alterações à medida a que ocorre o escoamento plástico. A evolução da superfície de cedência pode ser usualmente associada a um de três tipos de lei de encruamento:

- Encruamento isotrópico;
- Encruamento cinemático;
- Encruamento misto.

No encruamento isotrópico a ocorrência de deformação plástica resulta exclusivamente na expansão uniforme da superfície de cedência. Por outro lado, no encruamento cinemático a ocorrência de deformação plástica resulta apenas na translação da superfície de cedência no espaço das tensões. Assim, a diferença entre estes dois tipos de lei de encruamento reside no facto de, após uma eventual ocorrência da reversão de carga aplicada, a cedência ocorrer no encruamento isotrópico para uma variação de tensão correspondente ao dobro do valor da tensão de início de reversão ($\sigma_{\max}$) e no encruamento cinemático para uma variação de tensão correspondente ao dobro da tensão de cedência. Este facto encontra-se ilustrado na Figura 12.17 para um carregamento uniaxial constituído por tracção seguida de compressão. Deste modo constata-se que, ao contrário do encruamento isotrópico, o encruamento cinemático permite a simulação do efeito de Bauschinger, que se manifesta frequentemente no comportamento de materiais sujeitos a carregamentos de natureza cíclica. Por fim, no endurecimento misto a ocorrência de deformação plástica resulta simultaneamente na expansão e na translação da superfície de cedência.

12.5.1.3 Lei de plasticidade

A lei de plasticidade corresponde a uma regra de escoamento que relaciona, aquando da ocorrência do fenómeno de plastificação, o tensor das tensões com a evolução do tensor das deformações plásticas.

12.5.1.4 Condição de consistência

A condição de consistência obriga a que, aquando da ocorrência de um carregamento envolvendo o fenómeno de plastificação, a evolução da superfície de limite

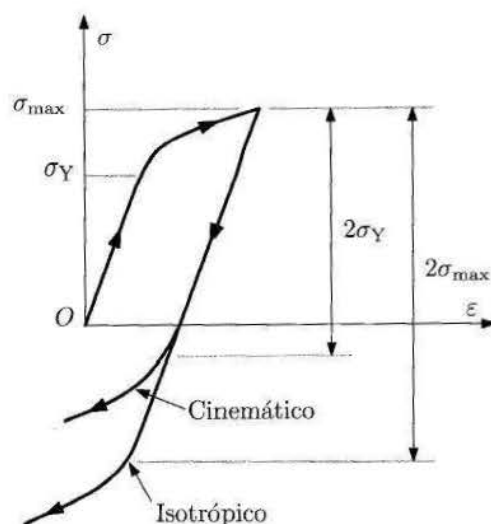


Figura 12.17 Representação esquemática dos encruamentos isotrópico e cinemático, para um carregamento uniaxial de tracção seguida de compressão.

de elasticidade seja tal que nela permaneçam todos os pontos representativos de estados de tensão associados ao desenvolvimento de deformação plástica. Por outro lado, pontos no interior do espaço delimitado pela superfície de cedência encontram-se em regime elástico.

12.5.1.5 Condições de carga-descarga

As condições de carga-descarga permitem determinar, após se ter dado início a deformação plástica e em conjunto com a condição de consistência, se a natureza da deformação é elástica ou plástica.

12.5.2 O modelo da elastoplasticidade infinitesimal

De modo a ilustrar a aplicação dos conceitos relacionados com o fenómeno da elastoplasticidade, apresenta-se o modelo da elastoplasticidade infinitesimal. Este modelo assenta na teoria da elasticidade linear e na teoria clássica da plasticidade, pressupondo um comportamento quase-estático e assumindo pequenas transformações. Em termos práticos, o modelo da elastoplasticidade infinitesimal baseia-se no critério de cedência de von Mises, com uma lei de plasticidade associada, uma lei de encruamento isotrópico linear, a condição de consis-

tência de Prager e as condições de carga-descarga de Kuhn-Tucker. Refira-se, ainda, que este modelo é frequentemente utilizado na modelação do comportamento elastoplástico de materiais metálicos, embora permita uma abordagem simplificada do comportamento de materiais metálicos envolvendo o desenvolvimento de deformação plástica, pois não são contemplados vários fenómenos mais complexos, tais como, por exemplo, viscoplasticidade, termoplasticidade, dano, transformações finitas, *etc.*

12.5.2.1 Critério de cedência

O critério de cedência de von Mises é um dos mais utilizados na análise de fenómenos de plasticidade em materiais metálicos. A sua vasta utilização deve-se ao facto de a sua natureza, simultaneamente isotrópica e desviadora, se encontrar em conformidade com as constatações experimentais de que, em geral, (i) os materiais metálicos policristalinos são isotrópicos e (ii) a aplicação de uma pressão hidrostática a um material metálico não dá origem a fenómenos de plasticidade. Este critério pode ser definido pela seguinte condição:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \varphi_e) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_Y(\varphi_e) = 0. \quad (12.9)$$

Nesta equação, $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma})$ é a tensão equivalente de von Mises, definida por

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma})}, \quad (12.10)$$

em que $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma})$ é o tensor das tensões desviadoras, que corresponde a

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}, \quad (12.11)$$

sendo $\mathbf{I}$ o tensor identidade de segunda ordem, cujas componentes correspondem ao símbolo de delta de Kronecker, δ_{ij} , com $i, j = 1, \dots, 3$. Atendendo à norma de Frobenius, definida para um tensor $\boldsymbol{\psi}$ por $\|\boldsymbol{\psi}\| = \sqrt{\boldsymbol{\psi} : \boldsymbol{\psi}}$, a tensão equivalente de von Mises pode, ainda, ser expressa por

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma})\|. \quad (12.12)$$

A tensão σ_Y é o limite de elasticidade em tracção simples e φ_e é um parâmetro escalar de encruamento. A equação escalar $f(\boldsymbol{\sigma}, \varphi_e) = 0$ define, no espaço

das tensões, a superfície de limite de elasticidade, encontrando-se a inequação $f(\boldsymbol{\sigma}, \varphi_e) < 0$ associada ao domínio elástico. Por outro lado, a condição $f(\boldsymbol{\sigma}, \varphi_e) = 0$ pode corresponder a situações relativas a fenómenos quer de elasticidade quer de plasticidade. Atenda-se ainda ao facto de não serem admissíveis quaisquer estados para os quais se verifique a desigualdade

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \varphi_e) > 0. \quad (12.13)$$

12.5.2.2 Lei de encruamento

Considera-se uma evolução da lei de encruamento em que o parâmetro escalar de encruamento φ_e corresponde a

$$\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}^p dt, \quad (12.14)$$

em que $\bar{\varepsilon}^p$ representa a deformação plástica equivalente, t é o pseudotempo e $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ é a taxa pseudotemporal de deformação plástica equivalente, definida por

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\|, \quad (12.15)$$

em que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ é o tensor das taxas pseudotemporais de deformação plástica. Note-se que, por uma questão de simplificação da notação utilizada e atendendo à natureza quase-estática do problema elastoplástico considerado, no presente capítulo adopta-se o carácter t para denotar quer o tempo quer o pseudotempo. O conceito de “pseudotempo” encontra-se relacionado com o facto de se estar perante um fenómeno quase-estático, ou seja, de natureza não-dinâmica. Este assunto será analisado em maior detalhe na secção seguinte.

É também possível caracterizar a evolução da lei de encruamento com base num outro parâmetro escalar de encruamento, denominado trabalho plástico total. No entanto, para modelos de plasticidade baseados no critério de cedência de von Mises, os dois parâmetros de encruamento dão origem aos mesmos resultados.

Neste contexto, uma lei de encruamento isotrópico linear pode ser definida por

$$\sigma_Y(\bar{\varepsilon}^p) = \sigma_Y^0 + H\bar{\varepsilon}^p, \quad (12.16)$$

em que a tensão σ_Y^0 é o valor inicial do limite de elasticidade em tracção simples e $H \in \mathbb{R}^+$ é o módulo de encruamento isotrópico. O encruamento isotrópico caracteriza-se pela expansão uniforme da superfície de limite de elasticidade no espaço das tensões, à medida que decorre o fenómeno de plasticidade.

12.5.2.3 Lei de plasticidade

A lei de plasticidade associada é considerada como válida na teoria da deformação plástica para a generalidade dos materiais metálicos. Uma lei de plasticidade diz-se associada no caso de se utilizar o mesmo potencial para descrever o comportamento plástico em termos quer da superfície de limite de elasticidade quer da deformação plástica. Esta lei pode ser definida por

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\Lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad (12.17)$$

em que o escalar $\dot{\Lambda}$ é designado multiplicador plástico. No caso de o multiplicador plástico ser positivo, isto é, quando se verifica a ocorrência de deformação plástica, a equação 12.17 traduz o facto de o tensor das taxas pseudotemporais de deformação plástica ser normal e exterior à superfície de limite de elasticidade. Por esta razão, a equação 12.17 é usualmente denominada lei da normalidade.

Da derivação de ambos os membros da equação 12.9 em ordem a σ , tendo em consideração a regra da cadeia utilizada na derivação de funções e atendendo às equações 12.10 e 12.11, resulta, de acordo não só com o carácter desviador de s mas também com a equação 12.17, que

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\Lambda} \frac{3}{2} \frac{s}{\bar{\sigma}}. \quad (12.18)$$

Atendendo ao facto de o tensor s ser desviador, verifica-se, de acordo com a equação 12.18, que

$$\text{tr}(\dot{\epsilon}^p) = 0, \quad (12.19)$$

o que revela o carácter isocórico da deformação plástica. Por outro lado, de acordo com a expressão 12.12, a equação 12.18 pode ser representada na forma

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\Lambda} \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{n}, \quad (12.20)$$

em que $\hat{\mathbf{n}}$ é um tensor unitário normal e exterior à superfície de limite de elasticidade. Assim, a substituição da equação 12.20 na expressão 12.15 permite verificar que

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\Lambda}. \quad (12.21)$$

A partir das equações 12.17 e 12.20 pode ainda concluir-se que

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{\mathbf{n}}. \quad (12.22)$$

12.5.2.4 Condições de consistência e de carga-descarga

A condição de consistência de Prager consiste em

$$\dot{\Lambda} \dot{f}(\sigma, \bar{\varepsilon}^p) = 0, \quad (12.23)$$

em que $\dot{f}(\sigma, \bar{\varepsilon}^p)$ é a taxa de variação pseudotemporal de $f(\sigma, \bar{\varepsilon}^p)$. Por outro lado, as condições de carga-descarga de Kuhn-Tucker correspondem ao seguinte:

$$\begin{cases} \dot{\Lambda} \geq 0, \\ f(\sigma, \bar{\varepsilon}^p) \leq 0 \\ \dot{\Lambda} f(\sigma, \bar{\varepsilon}^p) = 0 \end{cases} \quad (12.24)$$

Tal como foi anteriormente referido, as relações 12.23 e 12.24 permitem determinar, assim que se verifique o início da ocorrência de deformação plástica, se a natureza da deformação é elástica ou plástica. De acordo com estas relações, o comportamento do material será:

Elástico

$$\begin{cases} f(\sigma, \bar{\varepsilon}^p) < 0 \Rightarrow \dot{\Lambda} = 0 \text{ (deformação elástica)} \\ f(\sigma, \bar{\varepsilon}^p) = 0 \text{ e } \dot{f}(\sigma, \bar{\varepsilon}^p) < 0 \Rightarrow \dot{\Lambda} = 0 \text{ (descarga elástica)} \\ f(\sigma, \bar{\varepsilon}^p) = 0, \dot{f}(\sigma, \bar{\varepsilon}^p) = 0 \text{ e } \dot{\Lambda} = 0 \text{ (carga neutra)} \end{cases}$$

Plástico

$$f(\sigma, \bar{\varepsilon}^p) = 0, \dot{f}(\sigma, \bar{\varepsilon}^p) = 0 \text{ e } \dot{\Lambda} > 0 \text{ (carga plástica)}$$

Realce-se o facto de não serem admissíveis evoluções para as quais se verifiquem simultaneamente as condições $f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) = 0$ e $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) > 0$, a que correspondem situações em que se ultrapassaria o limite da superfície de cedência.

12.5.2.5 Módulo elastoplástico tangente

Em termos infinitesimais, atendendo ao carácter incremental da plasticidade, consideram-se as equações 12.6 e 12.8 na forma de taxas pseudotemporais, obtendo-se

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (12.25)$$

e

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, \quad (12.26)$$

respectivamente. Assim, a substituição das equações 12.17 e 12.25 na expressão 12.26 resulta em

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right). \quad (12.27)$$

Por outro lado, a taxa de variação pseudotemporal de $f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p)$ corresponde — atendendo à regra da cadeia utilizada na derivação de funções e considerando, com $\varphi_e = \bar{\varepsilon}^p$, as equações 12.9, 12.16 e 12.21 — à seguinte relação:

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\lambda}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H \dot{\lambda}. \quad (12.28)$$

Atendendo ao facto de $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p)$ ser nula no regime de deformação plástica, substituindo a equação 12.27 na expressão 12.28 e resolvendo em ordem a $\dot{\lambda}$, obtém-se

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{D} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + H}, \quad (12.29)$$

em que a não-singularidade da expressão é garantida pelo facto de o denominador ser estritamente positivo.

Atenda-se ao facto de o multiplicador plástico, por um lado, ser nulo no caso de um comportamento elástico e, por outro lado, corresponder à equação 12.29 no caso de um comportamento plástico. Neste contexto, da substituição

da equação 12.29 na expressão 12.27, resulta que

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}^{\text{ep}} : \dot{\epsilon} \quad (12.30)$$

ou, de modo equivalente, que

$$d\sigma = \mathbf{D}^{\text{ep}} : d\epsilon, \quad (12.31)$$

em que o tensor $\mathbf{D}^{\text{ep}}$, denominado módulo elastoplástico tangente, corresponde a

$$\mathbf{D}^{\text{ep}} = \mathbf{D} - \varrho \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} : \frac{\partial f}{\partial \sigma}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \mathbf{D} : \frac{\partial f}{\partial \sigma} + H} \quad (12.32)$$

ou, em notação matricial, a

$$\mathbf{D}^{\text{ep}} = \mathbf{D} - \varrho \frac{\mathbf{D}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D}}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{D} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} + H}, \quad (12.33)$$

sendo o parâmetro ϱ definido por

$$\varrho = \begin{cases} 0 & \Leftarrow \dot{\Lambda} = 0 \text{ (carga não-plástica)} \\ 1 & \Leftarrow \dot{\Lambda} > 0 \text{ (carga plástica)} \end{cases}. \quad (12.34)$$

Deste modo, o módulo elastoplástico tangente $\mathbf{D}^{\text{ep}}$ permite relacionar quer os tensores das taxas pseudotemporais de tensão e de deformação (equação 12.30) quer os incrementos (infinitesimais) dos tensores das tensões e das deformações (equação 12.31).

Devido ao facto de não se considerarem quaisquer efeitos viscosos, a equação 12.30 é homogénea em t , isto é, é invariante relativamente à escala do pseudotempo. Deste modo, as suas representações na forma de taxa pseudotemporal (equação 12.30) e na forma incremental (equação 12.31) são equivalentes. Refira-se que esta equivalência entre as representações na forma de taxa pseudotemporal e na forma incremental se mantém válida para as restantes equações desta secção que envolvam taxas pseudotemporais (ver, por exemplo, a equação 12.17).

12.5.3 Não-linearidade material dinâmica

A fluência corresponde à ocorrência de deformação quando um material se encontra solicitado por uma carga constante. A consideração deste tipo de comportamento não-linear é importante na análise de estruturas de betão ou análises envolvendo temperaturas elevadas. Em geral o fenómeno de fluência é constituído por três fases a que correspondem a fluência primária (transitória), secundária (estacionária) e terciária, tal como se ilustra na Figura 12.18.

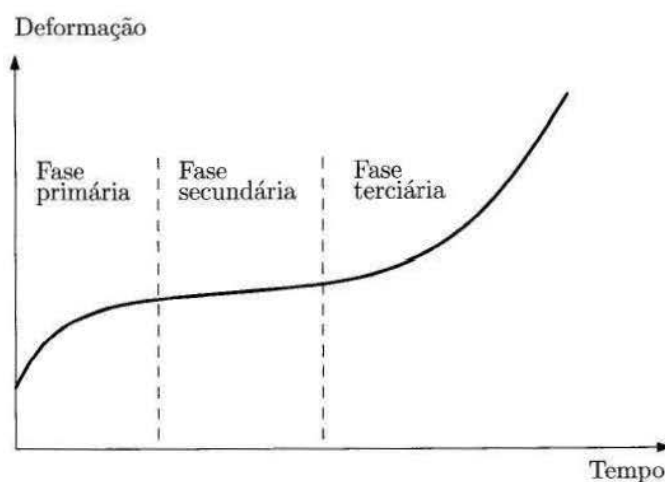


Figura 12.18 Representação esquemática das fases de fluência.

O fenómeno da fluência pode ser mecanicamente representado pelo modelo de Maxwell, que consiste na associação em série de uma mola linear e de um amortecedor viscoso, tal como se ilustra na Figura 12.19. Para além do fenómeno de fluência, os materiais sujeitos a uma deformação constante podem também sofrer uma diminuição gradual do nível de tensão com o tempo, sendo este fenómeno denominado relaxação.

Outro fenómeno dinâmico de carácter não-linear consiste na viscoelasticidade. Neste fenómeno o comportamento mecânico do material depende da taxa de deformação (elástica). O fenómeno de viscoelasticidade pode ser mecanicamente representado pelo modelo de Kelvin, que consiste na associação em paralelo de uma mola linear e de um amortecedor viscoso, como se ilustra na Figura 12.20.

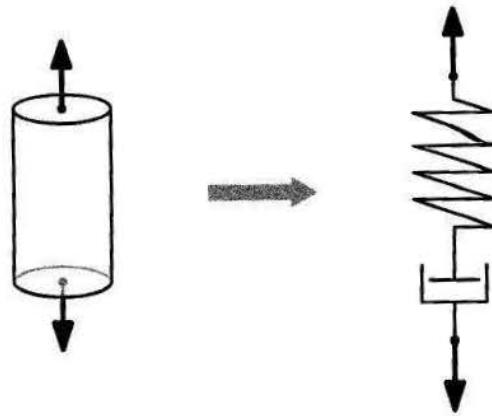


Figura 12.19 Representação esquemática do modelo mecânico de Maxwell para a fluência.

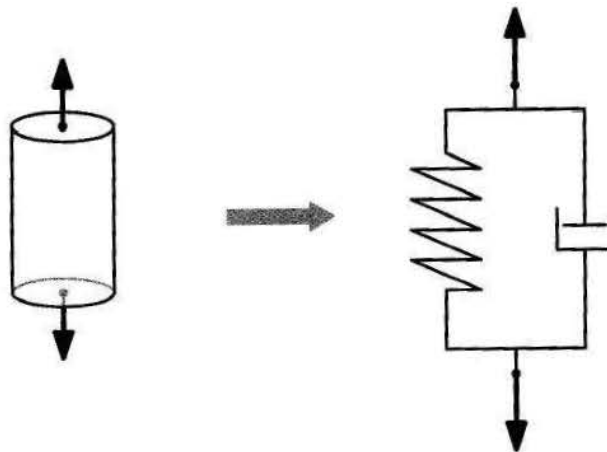


Figura 12.20 Representação esquemática do modelo mecânico de Kelvin para a viscoelasticidade.

12.5.4 Não-linearidade geométrica

Numa análise de elementos finitos utilizando o método de Newton-Raphson (ver Secção 12.6), a relação entre os incrementos de força $\mathbf{F}$ e de deslocamento $\mathbf{u}$ é denominada rigidez tangente $\mathbf{K}_T$. Em geral, esta rigidez é constituída por três componentes: (i) a rigidez material, (ii) a rigidez inicial e (iii) a rigidez geométrica. A rigidez material corresponde a uma rigidez tangente que na fase elástica coincide com a utilizada numa análise linear e no caso unidimensional corresponde ao módulo de Young. A rigidez inicial representa a resistência ao carregamento causado pelo realinhamento das tensões internas quando ocor-

rem deslocamentos. Por fim, a rigidez geométrica representa a rigidez adicional oriunda da existência de relações deformações-deslocamentos não-lineares. Atenda-se ao facto de os dois últimos tipos de rigidez se encontrarem associados à não-linearidade geométrica. Por fim, refira-se que a resolução de problemas numéricos envolvendo não-linearidade geométrica sai do âmbito deste texto. Nesse contexto, a resolução é usualmente feita recorrendo a duas técnicas distintas: (i) o método lagrangiano total, em que todas as grandezas tensoriais se referem à geometria não-deformada da estrutura e é geralmente adoptada em análises com grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações; (ii) o método lagrangiano reactualizado, em que todas as grandezas tensoriais se referem à geometria deformada da estrutura, que vai sendo reactualizada ao longo de um processo incremental-iterativo.

12.5.5 Não-linearidades nas condições de fronteira

De entre os fenómenos responsáveis pelo aparecimento de não-linearidades nas condições de fronteira realçam-se o contacto e o atrito. A consideração de contacto entre duas superfícies envolve a definição de condições de impenetrabilidade entre entidades geométricas. Além disso, a análise de problemas envolvendo o fenómeno de contacto é geralmente efectuada simulando a sua ocorrência entre superfícies rígidas e deformáveis, ou apenas entre superfícies deformáveis. Por outro lado, a existência de atrito envolve a transmissão de esforços de corte entre duas superfícies, sendo este fenómeno usualmente modelado com base na lei clássica de atrito, denominada lei de Coulomb. Embora sejam bastante complexas, as análises numéricas envolvendo contacto e atrito são bastante usuais na simulação de processos tecnológicos. A interacção de duas superfícies origina geralmente fenómenos de dissipação de energia em forma de calor e de aderência superficial, pelo que as análises com contacto e atrito podem envolver a consideração adicional de fenómenos termomecânicos associados à interacção superficial.

12.6 Modelação de análises não-lineares

12.6.1 Aspectos gerais da análise não-linear: Procedimentos incrementais e iterativos

De acordo com o que foi anteriormente referido, a existência de não-linearidades resulta em não se ter uma proporcionalidade directa entre forças e deslocamentos: $\mathbf{F} \neq \mathbf{K}\mathbf{u}$. Em geral, este carácter não-linear de uma análise estrutural estática ou quase-estática caracteriza-se pelo facto de a rigidez depender dos deslocamentos, tendo-se $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{u})$. Recorde-se que, no caso linear, a rigidez $\mathbf{K}$ é constante. Deste modo, a equação associada à análise não-linear corresponde a $\mathbf{F} = \mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u}$. Como foi já referido, é usual recorrer-se à utilização de procedimentos incrementais-iterativos para se obter a solução de um problema não-linear, conforme se ilustra na Figura 12.21. Nestes procedimentos procura-se a solução para cada incremento de carga recorrendo a um processo iterativo. Neste contexto, existem vários métodos de resolução incremental-iterativa da equação de equilíbrio, sendo usualmente utilizado o método de Newton-Raphson ou uma sua variante, denominada método de Newton-Raphson modificado.

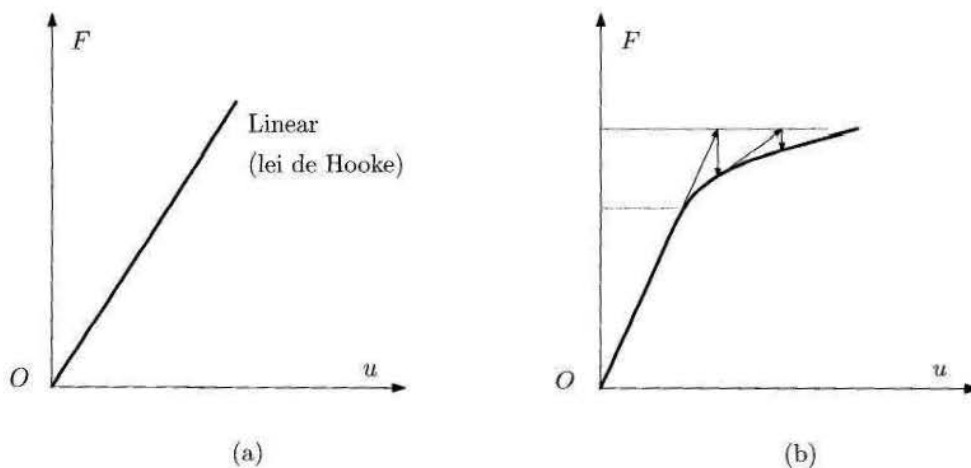


Figura 12.21 Representação esquemática da resolução numérica numa análise estática ou quase-estática (a) linear e (b) não-linear.

No método de Newton-Raphson procede-se à actualização da matriz de rigidez $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{u})$ em cada uma das iterações de um dado incremento. Com base neste método é possível obter uma convergência quadrática da solução, o que significa que o processo iterativo decorre com um decréscimo quadrático do erro.

Estes aspectos serão oportunamente abordados e desenvolvidos no decorrer do texto. No método de Newton-Raphson modificado, a matriz de rigidez só é ocasionalmente actualizada, sendo usualmente actualizada na primeira iteração de cada incremento. No entanto, embora se revele computacionalmente menos dispendioso, o método de Newton-Raphson modificado resulta geralmente numa taxa de convergência menor do que a do método não-modificado.

De acordo com a Figura 12.22, o processo incremental-iterativo associado a uma análise não-linear corresponde à fase de cálculo numérico relativa à resolução do sistema de equilíbrio, antecedida pela fase de pré-processamento associada à definição do modelo numérico e procedida pela fase de pós-processamento e análise de resultados numéricos.

De acordo com o que foi anteriormente referido, o carácter não-linear da equação de equilíbrio $\mathbf{F} = \mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u}$ advém de características específicas dos fenómenos físicos associados a (i) não-linearidade material, (ii) não-linearidade geométrica ou (iii) não-linearidade nas condições de fronteira. Em seguida, procede-se à apresentação dos procedimentos envolvidos na modelação de uma análise não-linear, os quais permitem a obtenção do sistema $\mathbf{F} = \mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u}$, e são discutidos alguns dos principais aspectos com eles relacionados.

12.6.2 Aspectos particulares e procedimentos da análise não-linear

Em termos gerais, na modelação de uma análise não-linear procede-se, em primeiro lugar, à formulação (forte) do problema em que se define a equação diferencial que governa o problema em análise. Em seguida, de modo a se poder aplicar o método dos elementos finitos, procede-se, em conformidade com o efectuado nos Capítulos 6 e 7, à obtenção da formulação integral fraca do problema, considerando geralmente o princípio dos deslocamentos virtuais no caso de um problema mecânico e o princípio das temperaturas virtuais no caso de um problema térmico. No caso do problema ser estático ou quase-estático procede-se então à discretização espacial do problema por elementos finitos. No entanto, no caso de problemas dinâmicos, a dependência simultaneamente espacial e temporal leva à necessidade de se proceder inicialmente a uma discretização espacial, geralmente denominada semidiscretização espacial por ser efectuada independentemente do tempo, e a uma posterior discretização temporal. A discretização espacial consiste na aproximação dos campos contínuos no espaço com variáveis discretas, tal como foi referido no Capítulo 2 e se ilustra na Figura 2.11,

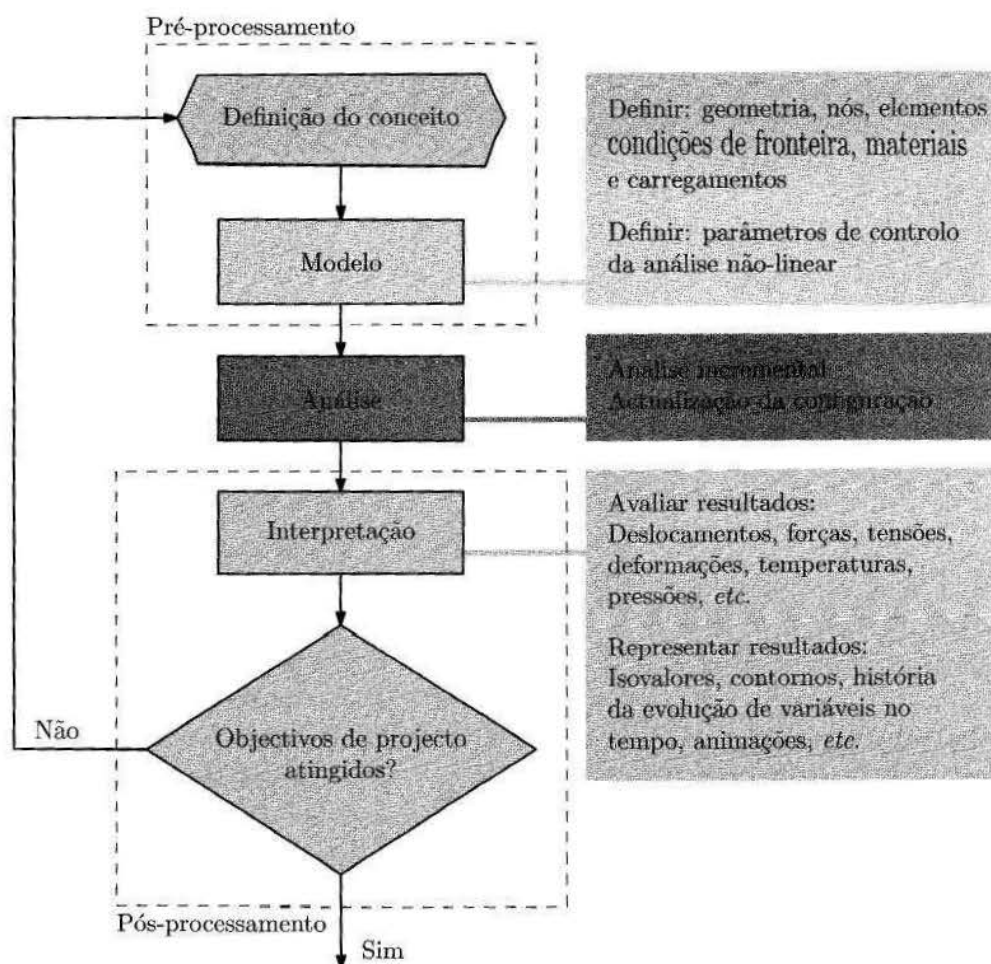


Figura 12.22 Representação esquemática da metodologia de análise não-linear por elementos finitos.

e permite passar de um sistema de equações diferenciais parciais a um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Com base neste sistema de equações diferenciais ordinárias há vários métodos para obtenção da resposta dinâmica, que, em geral, podem ser divididos em duas principais categorias: (i) a análise modal e (ii) o método directo.

A análise modal é um método que se baseia fundamentalmente na linearidade do sistema e que visa determinação das frequências e dos modos naturais do sistema. Por outro lado, em situações em que se verifique uma natureza não-linear do comportamento estrutural (por exemplo, em plasticidade ou grandes deformações), é usual proceder-se à utilização do método de integração directa das

equações de equilíbrio, utilizando um processo incremental em que se discretiza o processo de carregamento estrutural.

Considerando-se a utilização do método directo, procede-se à discretização temporal do sistema de equações ordinárias. Este procedimento consiste em considerar que a evolução temporal do processo se faz por incrementos discretos de tempo, Δt , e não de modo contínuo. Refira-se que em problemas estáticos ou quase-estáticos não faz sentido falar em integração temporal, uma vez que se assume uma invariância temporal das variáveis envolvidas no problema numérico em questão. No entanto, a natureza não-linear do comportamento elastoplástico requer a utilização de um processo incremental, em que se discretiza o nível de carga mecânica (pseudotempo), utilizando-se assim a designação de discretização pseudotemporal. Posteriormente à discretização temporal (ou pseudotemporal) do problema, procede-se a um processo recursivo — o método de integração temporal (ou pseudotemporal) — em que, partindo das condições iniciais (no caso dinâmico), se obtêm as soluções para os instantes (ou pseudo-instantes) subsequentes.

Os algoritmos de integração temporal do método directo, também denominados métodos de integração directa, são geralmente subdivididos em dois grupos: (i) métodos explícitos e (ii) métodos implícitos. Nos algoritmos explícitos as variáveis a serem determinadas num dado intervalo de tempo dependem apenas de variáveis obtidas nos intervalos de tempo anteriores. Pelo contrário, nos algoritmos implícitos as variáveis a serem determinadas num dado intervalo de tempo dependem não só de variáveis obtidas nos intervalos de tempo anteriores mas também delas próprias. Este facto dá origem a um problema não-linear que requer a utilização de um processo iterativo. Assim, em vez de se resolver o problema não-linear original de uma só vez, procede-se à resolução de subproblemas em que a solução é inicialmente aproximada de modo linear e posteriormente corrigida, se for necessário, recorrendo a um método iterativo (usualmente o método de Newton-Raphson) tal como se referiu na Secção 12.6.1. Atenda-se ainda ao facto de ser também possível subdividir os algoritmos implícitos em algoritmos semi-implícitos e (totalmente) implícitos. Este último tipo distingue-se do anterior pelo facto de as variáveis a determinar num dado intervalo de tempo dependerem única e exclusivamente delas próprias, sendo assim independentes de variáveis relativas a intervalos de tempo anteriores.

Os algoritmos explícitos caracterizam-se por levarem, na generalidade dos casos, à necessidade de menores recursos computacionais por intervalo de tempo, não havendo necessidade de utilizar processos iterativos para a obtenção da solução num determinado instante. Assim, pode dizer-se que os métodos explícitos

levam, muitas vezes, a processos de resolução numérica eficientes e robustos, o que se traduz em menores tempos de computação. No entanto, deve atender-se ao facto de este tipo de algoritmos serem condicionalmente estáveis, pelo que a estabilidade do processo numérico está associada a um limite máximo de incremento de tempo que não deve ser ultrapassado numa análise, denominado valor crítico. Este valor é inversamente proporcional à máxima frequência natural do sistema discreto e directamente relacionado com o grau de refinamento da malha de elementos finitos utilizada. Assim, por uma questão de estabilidade, em certos problemas estruturais os métodos explícitos podem revelar-se pouco eficazes, já que o valor crítico do incremento poderá ser bastante menor do que o necessário para uma integração razoavelmente precisa dos modos solicitados. Assim, embora este método conduza a soluções de modo imediato, apresenta a desvantagem de não só obrigar à utilização de incrementos de tempo extremamente reduzidos mas também de a solução numérica poder afastar-se da real, devido à acumulação de erros de aproximação em cada incremento.

Por outro lado, a utilização dos métodos implícitos leva a processos numéricos computacionalmente mais dispendiosos do que os associados aos métodos explícitos. De facto, a utilização de um processo iterativo leva à necessidade de serem determinadas as matrizes globais do sistema de equações associado ao problema, o que acarreta um maior uso de memória computacional. No entanto, características como a estabilidade incondicional ou então a possibilidade de utilização de incrementos de tempo significativamente maiores do que os associados aos métodos explícitos, tornam os métodos implícitos competitivos e, em certo tipo de problemas, mais adequados do que os explícitos. A possibilidade de utilização de incrementos de tempo significativamente maiores do que os associados aos métodos explícitos é o que geralmente ocorre em situações de análises quase-estática ou de dinâmica estrutural, em que as frequências não-elevadas envolvidas no problema permitem a utilização de incrementos de tempo relativamente altos associados a uma precisão razoável.

Por fim, refira-se que a utilização um método iterativo, tal como o de Newton-Raphson, leva à necessidade da definição de critérios de convergência e de paragem associados ao processo iterativo, de modo a que se optimize o equilíbrio do sistema e a precisão dos resultados obtidos.

Em seguida, com base nos aspectos particulares e procedimentos apresentados e discutidos na presente secção, procede-se à apresentação de dois exemplos de modelação não-linear envolvendo uma análise quase-estática e uma análise dinâmica.

12.7 Exemplos de modelação não-linear

Existem inúmeras áreas da ciência e da engenharia que envolvem a consideração de fenómenos quer de elastoplasticidade quer de condução de calor. No entanto, as fortes não-linearidades de comportamento que se encontram associadas a estes fenómenos inviabilizam, de um modo geral, a abordagem analítica destes fenómenos. Neste contexto, apresentam-se seguidamente exemplos de modelação não-linear nesses domínios:

- Elastoplasticidade infinitesimal: apresenta-se a formulação do problema de elastoplasticidade quase-estática. Com base no princípio dos deslocamentos virtuais, obtém-se a sua formulação integral fraca, procedendo-se, posteriormente, à sua discretização espacial por elementos finitos. Discutem-se as especificidades associadas quer à integração implícita da equação de equilíbrio discretizada pelo método iterativo de Newton-Raphson quer aos critérios de convergência e de paragem utilizados. Por fim, apresenta-se o algoritmo adoptado para a integração implícita da lei de comportamento elastoplástico e são tecidos alguns comentários acerca do módulo elastoplástico consistente;
- Condução de calor: apresenta-se a equação geral da condução de calor em meios sólidos na forma diferencial. Com base no princípio das temperaturas virtuais e no método dos resíduos pesados, procede-se à semidiscretização espacial e à integração temporal da equação geral da condução de calor, respectivamente. Posteriormente, tecem-se algumas considerações acerca dos diversos esquemas de integração numérica. Discutem-se as especificidades associadas ao regime transitório e apresenta-se o algoritmo de integração implícita associado ao regime transitório não-linear. Referem-se, de modo sucinto, as especificidades associadas aos regimes estacionários linear e não-linear. Por fim, apresentam-se os critérios de convergência e de paragem considerados no processo iterativo.

12.7.1 Análise quase-estática: Elastoplasticidade infinitesimal

12.7.1.1 *Formulação diferencial do problema*

A equação que descreve o problema elastoplástico num meio sólido contínuo $\Omega \in \mathbb{R}^3$, assumindo um processo quase-estático e pequenas transformações, corresponde, considerando um referencial cartesiano ortonormado, a

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega, \quad (12.35)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ e $\mathbf{f}$ são o tensor das tensões de Cauchy e o vector das forças volúmicas, respectivamente. O meio sólido ocupa o conjunto aberto $\Omega \in \mathbb{R}^3$, delimitado pela fronteira Γ . A resolução do problema elastoplástico corresponde à determinação de $\mathbf{u}$ em $\bar{\Omega}$, sendo $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ o fecho de Ω .

As relações deformações-deslocamentos linearizadas para o problema elastoplástico correspondem, em Ω , à equação 12.7. Neste contexto, no presente problema tem-se que, em geral, o tensor das tensões de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$, depende não-linearmente do vector de deslocamentos, $\mathbf{u}$.

A resolubilidade da equação 12.35 exige a imposição de condições de fronteira associadas ao problema elastoplástico. Em geral, para o problema elastoplástico consideram-se condições de fronteira de Dirichlet (essenciais) e de Neumann (naturais) definidas nas superfícies Γ_D e Γ_N , respectivamente, com

$$\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma \quad \text{e} \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset,$$

tal como se ilustra na Figura 12.23. Por uma questão de simplificação e sem perda de generalidade, as superfícies Γ_D e Γ_N são consideradas disjuntas, isto é, tais que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ (ver Figura 12.23). No entanto, numa situação geral, as prescrições de deslocamento e de força superficial podem coexistir simultaneamente em diferentes graus de liberdade de um determinado ponto da fronteira Γ , sendo $\Gamma_D \cap \Gamma_N \neq \emptyset$.

Note-se que é ainda possível definir condições de fronteira de Robin para o problema de elastoplasticidade. Fisicamente, estas correspondem à existência de uma fundação elástica em contacto com uma parte da fronteira Γ . Porém, dada a natureza peculiar deste tipo de condição de fronteira, não se consideram, sem perda de generalidade, condições de fronteira de Robin no problema elastoplástico.

As condições de fronteira de Dirichlet correspondem a

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_D, \quad (12.36)$$

em que $\bar{\mathbf{u}}$ é o deslocamento prescrito na superfície Γ_D . Por outro lado, as condições de fronteira de Neumann, definidas por

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \Gamma_N, \quad (12.37)$$

representam a prescrição de força superficial $\bar{\mathbf{t}}$ na superfície Γ_N , em que $\mathbf{n}$ é um versor normal exterior à superfície Γ . Refira-se ainda que, por uma questão

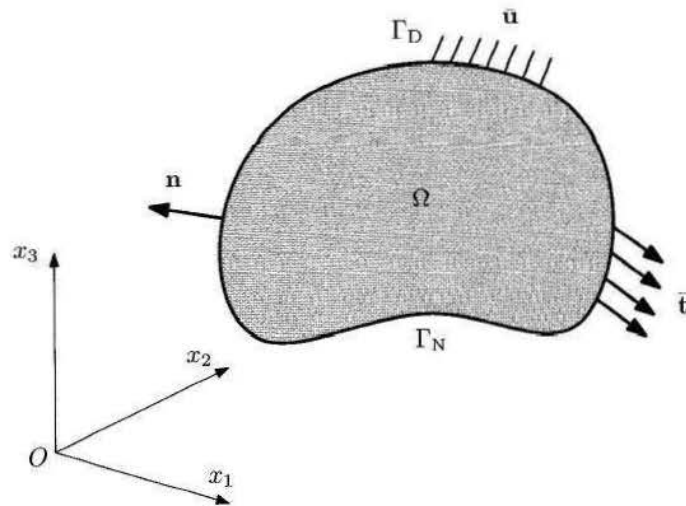


Figura 12.23 Representação esquemática das condições de fronteira associadas ao problema elastoplástico num corpo sólido Ω .

de simplificação, na abordagem apresentada do problema elastoplástico não foi considerada a existência de múltiplos materiais. No caso de existirem n materiais distintos, o problema elastoplástico é constituído por n equações análogas à equação 12.35. Todavia, para além das condições de fronteira já consideradas, dever-se-ão impor ainda condições de continuidade de deslocamentos e de forças superficiais em quaisquer das interfaces entre os vários subdomínios.

A resolução numérica do problema elastoplástico associado à equação diferencial 12.35, com base no método dos elementos finitos, requer a obtenção da sua formulação integral fraca.

12.7.1.2 Formulação integral fraca do problema elastoplástico

No que se segue, utiliza-se o princípio dos deslocamentos virtuais para se obter a formulação integral fraca do problema elastoplástico.

Seja $\delta \mathbf{u}$ um campo arbitrário de deslocamentos virtuais contínuo e suficientemente regular em Ω , com $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ em Γ_D . Neste contexto, efectuando o produto (tensorial) escalar da equação de equilíbrio 12.35 pelo campo $\delta \mathbf{u}$ e integrando no domínio Ω , obtém-se

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot [\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f}] \, d\Omega = 0. \quad (12.38)$$

Devido à natureza arbitrária do campo de deslocamentos virtuais tem-se que a formulação integral forte 12.38 é equivalente à formulação diferencial (forte) 12.35. Substituindo na equação 12.38 a identidade

$$\delta \mathbf{u} \cdot \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \operatorname{div}(\delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \operatorname{grad}(\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma} \quad (12.39)$$

e reorganizando os seus termos, obtém-se

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad}(\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega. \quad (12.40)$$

A aplicação do teorema da divergência (ver equação 6.48) ao último termo do segundo membro da equação 12.40 resulta em

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma. \quad (12.41)$$

No entanto, sendo $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ e $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ em Γ_D , tem-se que

$$\int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma = \int_{\Gamma_N} \delta \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma. \quad (12.42)$$

A substituição das equações 12.37, 12.41 e 12.42 na equação 12.40 resulta em

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad}(\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma. \quad (12.43)$$

Por outro lado, atendendo à simetria de $\boldsymbol{\sigma}$, tem-se que

$$\operatorname{grad}(\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma} = \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}, \quad (12.44)$$

em que

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{grad}(\delta \mathbf{u}) + [\operatorname{grad}(\delta \mathbf{u})]^T \right] \quad (12.45)$$

é o campo de deformações virtuais. A substituição da equação 12.44 na expressão 12.43 resulta em

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma. \quad (12.46)$$

A equação integral 12.46 corresponde ao princípio dos deslocamentos virtuais para o problema elastoplástico associado à equação 12.35. Segundo este prin-

cípio, para que $\mathbf{u}$ — um campo de deslocamentos contínuo e suficientemente regular em Ω , com $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ em Γ_D — seja a solução do problema elastoplástico, a equação 12.46 deverá verificar-se para qualquer campo arbitrário de deslocamentos virtuais $\delta\mathbf{u}$ contínuo e suficientemente regular em Ω , com $\delta\mathbf{u} = 0$ em Γ_D . Atenda-se ao facto de, ao serem assumidas pequenas transformações, isto é, transformações infinitesimais, a equação integral 12.46 resulta geometricamente linear. Deste modo, as configurações do volume Ω e da superfície Γ_N são consideradas invariantes, pelo que qualquer não-linearidade associada à equação 12.46 advém única e exclusivamente da natureza não-linear da relação entre a tensão e a deformação ou, de acordo com a equação 12.7, entre a tensão e o deslocamento (não-linearidade material).

Após se ter obtido a formulação fraca do problema elastoplástico, procede-se à sua discretização espacial por elementos finitos.

12.7.1.3 Discretização espacial por elementos finitos

Procedendo à decomposição do domínio Ω numa malha de elementos finitos, aproxima-se o campo global de deslocamentos por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{U} \quad \text{em } \Omega \quad (12.47)$$

e

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\Gamma(\mathbf{x}) \mathbf{U} \quad \text{em } \Gamma. \quad (12.48)$$

$\mathbf{N}$ e $\mathbf{N}_\Gamma$ constituem as matrizes globais de funções de forma, isto é, de interpolação, no domínio Ω e na superfície Γ , respectivamente. $\mathbf{U}$ é o vector dos deslocamentos nodais, em que as componentes relativas aos nós associados a Γ_D correspondem a valores de deslocamento prescrito.

Por outro lado, na discretização espacial assume-se que o campo global de deslocamentos virtuais é aproximado por

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \delta\mathbf{U} \quad \text{em } \Omega \quad (12.49)$$

e

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\Gamma(\mathbf{x}) \delta\mathbf{U} \quad \text{em } \Gamma, \quad (12.50)$$

em que $\delta\mathbf{U}$ corresponde ao vector dos deslocamentos virtuais nodais, sendo nulas as componentes relativas aos nós associados a Γ_D . Neste contexto, a substituição das equações 12.45, 12.49 e 12.50 na equação 12.46 permite obter, atendendo à

arbitrariade do campo de deslocamentos virtuais e utilizando notação matricial, a equação discretizada de equilíbrio elastoplástico, isto é,

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}, \quad (12.51)$$

em que $\mathbf{G}$ e $\mathbf{F}$ são os vectores de forças internas e de forças externas, respectivamente, que correspondem a

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (12.52)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_N + \mathbf{R}_N \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{N}_{\Gamma}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \sum_{k=1}^{n_r} (\bar{\mathbf{R}}_N)_k, \end{aligned} \quad (12.53)$$

em que $\mathbf{B}$ é a matriz global das derivadas parciais das funções de forma, e $\mathbf{F}_V$ e $\mathbf{F}_N$ correspondem aos vectores de forças distribuídas no volume Ω e na superfície Γ_N , respectivamente. $\mathbf{R}_N$ representa o vector de forças pontuais (nodais), constituído por n_r forças prescritas $\bar{\mathbf{R}}_N$. As forças pontuais (nodais) correspondem a forças aplicadas em subsuperfícies infinitesimais de Γ_N . Estas foram omitidas, sem perda de generalidade, na formulação diferencial do problema elastoplástico por uma questão de simplificação.

12.7.1.4 Integração implícita da equação discretizada

No regime estacionário não faz sentido falar em integração temporal, uma vez que se assume uma invariância temporal das variáveis envolvidas no problema numérico em questão. No entanto, a natureza não-linear do comportamento elastoplástico requer a utilização de um processo incremental em que se discretiza o nível de carga mecânica (pseudotempo). Assim, em vez de se resolver o problema não-linear original de uma só vez, procede-se à resolução de subproblemas em que a solução é inicialmente aproximada de modo linear e posteriormente corrigida, se for necessário, recorrendo a um método iterativo. Neste contexto, com base nos vectores de forças internas, $\mathbf{G}(\mathbf{U})$, e de forças externas, $\mathbf{F}$, define-se o seguinte resíduo:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \mathbf{F} - \mathbf{G}(\mathbf{U}). \quad (12.54)$$

Neste contexto, $\mathbf{F}_t$ e $\mathbf{G}_t = \mathbf{G}(\mathbf{U}_t)$ são os vectores que definem o estado de equilíbrio mecânico num pseudo-instante t (conforme a equação 12.35). A este estado corresponde o resíduo

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{F}_t - \mathbf{G}_t = \mathbf{0}, \quad (12.55)$$

em que $\mathbf{R}_t = \mathbf{R}(\mathbf{U}_t)$. O processo incremental consiste em definir um novo estado de carga mecânica, $\mathbf{F}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_t + \Delta \mathbf{F}_{t+\Delta t}$, e determinar $\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \Delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}$, tal que

$$\mathbf{R}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \mathbf{G}_{t+\Delta t} = \mathbf{0}. \quad (12.56)$$

No entanto, a natureza não-linear do problema inviabiliza, de um modo geral, a obtenção directa da solução, pelo que o resíduo da equação 12.56 deverá então ser minimizado recorrendo a um método iterativo. No método iterativo de Newton-Raphson assume-se um comportamento linear para o resíduo na vizinhança da solução previamente obtida. O desenvolvimento linear do resíduo na vizinhança de $\mathbf{U}$ para a iteração $i + 1$, $i \in \mathbb{N}_0$, de um pseudo-instante incremental $t + \Delta t$ corresponde a

$$\mathbf{R}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{R}_{t+\Delta t}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{t+\Delta t}^i \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}. \quad (12.57)$$

Conforme se ilustra esquematicamente na Figura 12.24, com o método iterativo de Newton-Raphson procura-se melhorar a aproximação à solução, considerando que em equilíbrio

$$\mathbf{R}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{0}, \quad (12.58)$$

em que os deslocamentos nodais são actualizados de acordo com

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i + \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}. \quad (12.59)$$

De acordo com a Figura 12.24, a matriz tangente à curva do resíduo — a matriz jacobiana de $\mathbf{R}$ — corresponde, para $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i$, a

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{t+\Delta t}^i = \frac{\mathbf{0} - \mathbf{R}_{t+\Delta t}^i}{\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} - \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i}. \quad (12.60)$$

Assim, as equações 12.59 e 12.60 permitem concluir que a equação da correcção iterativa dos deslocamentos nodais corresponde a

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{t+\Delta t}^i \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = -\mathbf{R}_{t+\Delta t}^i \quad (12.61)$$

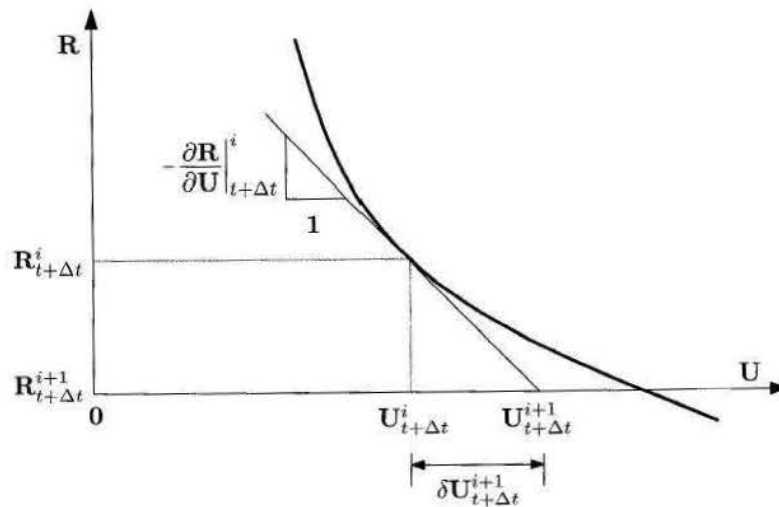


Figura 12.24 Representação unidimensional do processo de redução do resíduo no método de Newton-Raphson, na resolução implícita de problemas mecânicos em regime de elastoplasticidade quase-estática.

No entanto, de acordo com a equação 12.54 tem-se que

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{t+\Delta t}^i = \cancel{\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{t+\Delta t}^i} \overset{0}{\nearrow} - \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{t+\Delta t}^i, \quad (12.62)$$

em que, com base na hipótese de linearidade geométrica e, em particular, da invariância da configuração da superfície Γ_N , o vector de forças externas $\mathbf{F}$ resulta independente do vector de deslocamentos nodais $\mathbf{U}$. A equação 12.62 define a matriz jacobiana de $\mathbf{R}$ associada a uma linearização exacta do princípio dos deslocamentos virtuais em torno do último estado de deslocamentos referente ao ciclo iterativo. Assim, de acordo com as expressões 12.54, 12.61 e 12.62 obtém-se a seguinte equação de correcção iterativa dos deslocamentos nodais:

$$\mathbf{K}_T|_{t+\Delta t}^i \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \mathbf{G}_{t+\Delta t}^i, \quad (12.63)$$

em que a matriz tangente associada ao processo iterativo corresponde a

$$\mathbf{K}_T|_{t+\Delta t}^i = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{t+\Delta t}^i. \quad (12.64)$$

Substituindo a expressão 12.52 na equação 12.64, considerando a regra da cadeia utilizada na derivação de funções e atendendo ao facto de o problema ser geometricamente linear, obtém-se

$$\mathbf{K}_T|_{t+\Delta t}^i = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{t+\Delta t}^i \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{t+\Delta t}^i d\Omega. \quad (12.65)$$

Atendendo à seguinte relação deformação-deslocamento:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^i = \mathbf{B} \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i, \quad (12.66)$$

a equação 12.65 corresponde, atendendo quer à expressão 12.31 quer à invariância de $\mathbf{B}$, a

$$\mathbf{K}_T|_{t+\Delta t}^i = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{\text{ep}}|_{t+\Delta t}^i \mathbf{B} d\Omega, \quad (12.67)$$

em que

$$\mathbf{D}^{\text{ep}}|_{t+\Delta t}^i = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{t+\Delta t}^i \quad (12.68)$$

é a matriz elastoplástica tangente associada à iteração $i + 1$ do pseudo-instante incremental $t + \Delta t$. Para que a convergência do método de Newton-Raphson seja quadrática, a matriz elastoplástica tangente deve ser substituída pela matriz elastoplástica (tangente) consistente. Estas matrizes correspondem, em termos tensoriais, ao módulo elastoplástico tangente (ver equação 12.32) e ao módulo elastoplástico consistente, respectivamente. Os algoritmos numéricos relativos ao cálculo quer do vector de forças internas, $\mathbf{G}$, quer da matriz tangente associada ao processo iterativo, $\mathbf{K}_T$, serão abordados, de modo oportuno, em secções subsequentes.

No processo iterativo definem-se

$$\mathbf{F}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_t + \Delta \mathbf{F}_{t+\Delta t}, \quad (12.69)$$

como o vector de forças externas, e

$$\begin{cases} \mathbf{G}_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{G}_t \\ \mathbf{U}_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{U}_t \\ \mathbf{R}_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \mathbf{G}_{t+\Delta t}^0 \\ \mathbf{K}_T|_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{K}_T|_t \end{cases}, \quad (12.70)$$

como valores iniciais do vector de forças internas, do vector de deslocamentos nodais, do resíduo (vectorial) e da matriz tangente de rigidez, respectivamente. Posteriormente, procede-se à determinação da variação dos deslocamentos nodais recorrendo à equação 12.63, actualizando-se então o valor dos deslocamentos nodais, de acordo com a relação 12.59. Em seguida, com base no valor actualizado dos deslocamentos nodais são calculados quer o novo vector de forças internas, de acordo com a relação 12.52, quer a nova matriz tangente associada ao processo iterativo, com base na relação 12.67. Este procedimento deverá ser repetido até que se atinja a convergência, por exemplo, quando $\|\delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}\|$ for menor que um valor predefinido (tolerância). Na Figura 12.25 representa-se um esquema unidimensional do processo iterativo do método de Newton-Raphson para um problema elastoplástico, em que a solução num determinado incremento é atingida em três iterações.

Tal como foi referido, para que a convergência do método de Newton-Raphson seja quadrática, a matriz elastoplástica consistente deverá substituir a matriz elastoplástica tangente na equação 12.67.

O algoritmo de Newton-Raphson para problemas mecânicos de elastoplasticidade quase-estática encontra-se ilustrado na Tabela 12.1.

12.7.1.5 Critérios de convergência e de paragem

A utilização eficiente do método iterativo de Newton-Raphson exige que se recorra a critérios de convergência e de paragem. Estes critérios devem ser seleccionados com extremo cuidado, uma vez que deles dependem o equilíbrio do sistema e a precisão dos resultados. Neste contexto, para o problema de elastoplasticidade quase-estática consideram-se dois tipos distintos de critérios de convergência:

- Critérios baseados na magnitude das correcções da variável que controla o processo, tal como, por exemplo, a magnitude dos deslocamentos no processo mecânico;
- Critérios baseados na magnitude do resíduo.

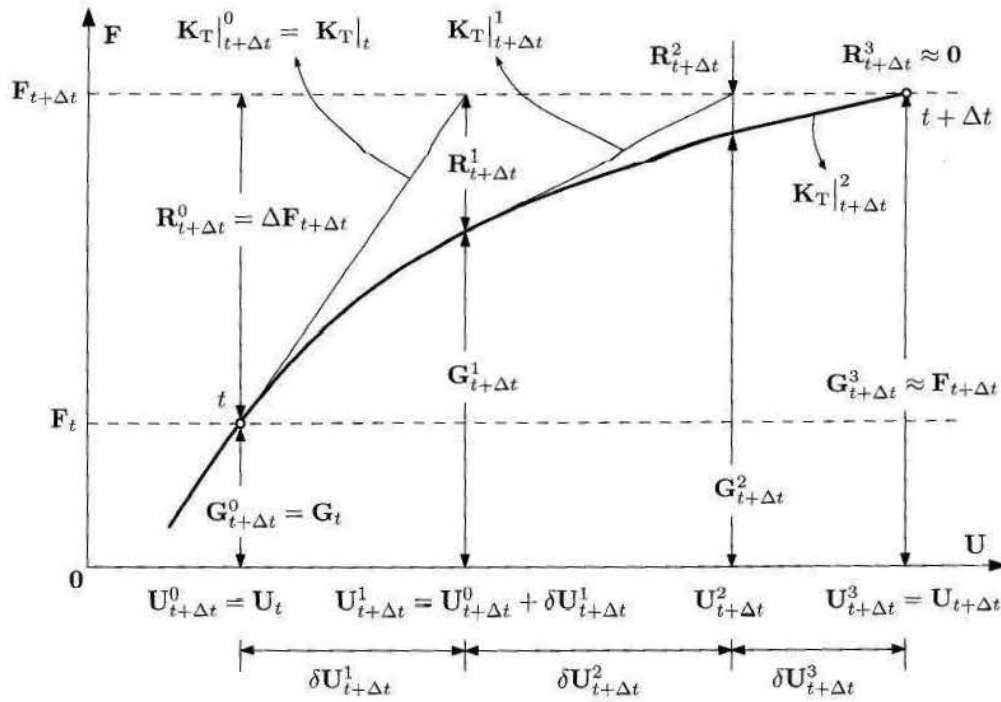


Figura 12.25 Representação esquemática do processo iterativo do método de Newton-Raphson, na resolução implícita de problemas mecânicos em regime de elastoplasticidade quase-estática.

Assim, para o primeiro caso, são considerados os seguintes critérios baseados na magnitude das correcções da variável que controla o processo:

$$\|\delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+2}\| \leq \varepsilon_{\text{tol}} \|\delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^1\| \quad (12.71)$$

e

$$\max (|\delta U_{t+\Delta t}^{i+2}|_k) \leq \varepsilon_{\text{tol}} \|\delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^1\|, \quad (12.72)$$

em que $\|\cdot\|$ designa a norma euclidiana de um vector e $i \in \mathbb{N}_0$, ε_{tol} é um parâmetro de tolerância predefinido e $k = 1, \dots, N_{\text{gl}}$, em que N_{gl} corresponde ao número de componentes do vector $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$. Nesta secção faz-se, por uma questão de simplificação, referência a um único parâmetro de tolerância, ε_{tol} , podendo, na prática, ser considerados diferentes valores de ε_{tol} para cada um dos critérios.

Por outro lado, considerou-se o seguinte critério baseado na magnitude do resíduo:

$$\|\mathbf{R}_{t+\Delta t}^{i+1}\| \leq \varepsilon_{\text{tol}} \|\mathbf{R}_{t+\Delta t}^0\|. \quad (12.73)$$

Tabela 12.1 Algoritmo de Newton-Raphson para resolução implícita de problemas mecânicos em regime de elastoplasticidade quase-estática.

1. Iniciação de variáveis:

$$1.1 \quad \mathbf{F}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_t + \Delta \mathbf{F}_{t+\Delta t}$$

$$1.2 \quad \mathbf{G}_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{G}_t$$

$$1.3 \quad \mathbf{R}_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \mathbf{G}_{t+\Delta t}^0$$

$$1.4 \quad \mathbf{U}_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{U}_t$$

$$1.5 \quad \mathbf{K}_T|_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{K}_T|_t$$

2. REPETIR — Ciclo iterativo em $i = 0, \dots$

$$2.1 \quad \text{Cálculo de } \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} \text{ por } \mathbf{K}_T|_{t+\Delta t}^i \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{R}_{t+\Delta t}^i$$

$$2.2 \quad \text{Actualização dos deslocamentos: } \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{U}_{t+\Delta t}^i + \delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}$$

$$2.3 \quad \text{Cálculo de } \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{i+1} \text{ e } \mathbf{K}_T|_{t+\Delta t}^{i+1} \text{ para } \mathbf{U} = \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}$$

$$2.4 \quad \text{Cálculo do resíduo } \mathbf{R}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{i+1} - \mathbf{G}_{t+\Delta t}^{i+1}$$

ATÉ convergência OU paragem

Tem-se que as condições 12.71 e 12.72 verificam quando é que as sucessivas iterações se traduzem em variações insignificantes da variável de controlo. No entanto, embora estas condições sejam de fácil implementação e envolvam um esforço computacional reduzido, não se revelam eficazes em situações em que o esquema iterativo possa convergir (ou divergir) de um modo muito lento. Por outro lado, a condição 12.73 controla a magnitude do resíduo, verificando quando é que a sua norma se torna suficientemente pequena. A simplicidade da implementação deste critério advém do facto de o vector $\mathbf{R}_{t+\Delta t}^{i+1}$ ser obtido em cada iteração. Todavia, este critério revela-se insensível à taxa de variação do resíduo. Neste contexto, a utilização simultânea dos diferentes tipos de critério (conforme as inequações 12.71 a 12.73) permite um controlo mais versátil e eficaz da convergência de um processo iterativo.

Por outro lado, de modo a evitar situações em que a não-convergência ou a convergência lenta do processo iterativo resulte num tempo despendido em cál-

culo computacional excessivo, foram considerados dois tipos distintos de critério de paragem. O primeiro critério de paragem adoptado neste trabalho consiste na finalização do ciclo iterativo, assim que o número de iterações efectuadas, N , atinja o número máximo de iterações admissível, ou seja,

$$N = N_{\max}. \quad (12.74)$$

Com base na magnitude do resíduo, pode considerar-se um critério de paragem que visa a finalização do ciclo iterativo sempre que se verifiquem oscilações numéricas de magnitude excessiva ou, inclusive, a divergência da solução, isto é,

$$\|\mathbf{R}_{t+\Delta t}^{i+1}\| \geq \frac{1}{\varepsilon_{\text{tol}}} \|\mathbf{R}_{t+\Delta t}^0\|. \quad (12.75)$$

No processo iterativo de Newton-Raphson (ver Tabela 12.1), após a determinação da correcção iterativa dos deslocamentos nodais $\delta \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}$ (equação 12.63) e a actualização dos deslocamentos nodais $\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}$ (equação 12.59), verificou-se ser necessário proceder, em cada iteração, ao cálculo quer do vector de forças internas, $\mathbf{G}_{t+\Delta t}^{i+1}$, quer da matriz tangente de rigidez associada ao processo iterativo, $\mathbf{K}_T|_{t+\Delta t}^{i+1}$. A obtenção do vector de forças internas requer, de acordo com a equação 12.52, a integração (pseudotemporal) da lei de comportamento elastoplástico. O cálculo da matriz tangente de rigidez na iteração $i+1$ do pseudo-instante incremental $t + \Delta t$ envolve a consideração, de acordo com a equação 12.67 para $i \leftarrow i + 1$, da matriz elastoplástica tangente. No entanto, para que a convergência do método de Newton-Raphson seja quadrática, é necessário substituir a matriz elastoplástica tangente pela matriz elastoplástica consistente, conforme se referiu na Secção 12.7.1.4. Neste contexto, em seguida são abordados, de modo sucinto, o algoritmo de integração adoptado e a formulação do módulo elastoplástico consistente associado ao modelo de elastoplasticidade clássica.

12.7.1.6 Integração implícita da lei de comportamento

A integração pseudotemporal da lei de comportamento elastoplástico pode ser efectuada recorrendo a vários métodos baseados em um ou mais passos de tempo. No entanto, procede-se à integração pseudotemporal do problema elastoplástico recorrendo a um dos métodos baseados num só passo de tempo. De entre estes, destacam-se a lei generalizada dos trapézios e a lei generalizada do ponto médio. Estes métodos podem ser explícitos, semi-implícitos ou implícitos. No caso de serem implícitos, os métodos da lei generalizada dos trapézios e da

lei generalizada do ponto médio degeneram no denominado algoritmo de retorno radial. Devido à sua natureza implícita, este algoritmo apresenta a característica de ser incondicionalmente estável. Neste contexto, adopta-se o algoritmo de retorno radial para se proceder à integração pseudotemporal da lei de comportamento elastoplástico. Na realidade, os métodos da lei generalizada dos trapézios e da lei generalizada do ponto médio coincidem para um modelo de elastoplasticidade baseado no critério de cedência de von Mises, com uma lei de plasticidade associada e uma lei de encruamento isotrópico linear.

Na prática, a consideração de método implícito de integração pseudotemporal leva a que as equações do modelo de elastoplasticidade sejam expressas em termos de incrementos de pseudotempo e não das taxas pseudotemporais correspondentes. Por outro lado, o processo de integração implícita é utilizado, em cada iteração do processo iterativo de Newton-Raphson, para o cálculo do vector de forças internas. Aquando do processo iterativo de Newton-Raphson, após a actualização dos deslocamentos nodais $\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{i+1}$, é possível determinar, de acordo com a equação 12.66 para $i \leftarrow i + 1$, o incremento do tensor das deformações — $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^{i+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_t$. Neste contexto, o processo de integração implícita consiste num algoritmo numérico, simbolicamente designado F , que permite, para a iteração $i + 1$, $i \in \mathbb{N}_0$, de um pseudo-instante incremental $t + \Delta t$, a determinação do tensor das tensões $\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}^{i+1}$ a partir do conhecimento do incremento actual do tensor (local) das deformações $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^{i+1}$ e dos valores prévios (de equilíbrio) dos tensores das deformações $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ e das deformações plásticas $\boldsymbol{\varepsilon}_t^p$, e da deformação plástica equivalente $\bar{\varepsilon}_t^p$. Deste modo, o processo de integração implícita pode ser simbolicamente representado pela seguinte relação:

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}^{i+1} = F \left(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^{i+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t^p, \bar{\varepsilon}_t^p \right). \quad (12.76)$$

Atenda-se ao facto de, no processo de integração implícita, o tensor das tensões $\boldsymbol{\sigma}_t$ ser, de acordo com as equações 12.6 e 12.8, uma variável dependente. Numericamente, o processo de integração implícita é efectuado ao nível dos pontos (de integração) de Gauss dos elementos finitos. Deste modo, este processo tem uma natureza intrinsecamente local, em contraste com o processo de resolução da equação de equilíbrio baseada no método de Newton-Raphson, que, ao estender-se à totalidade da estrutura em análise, apresenta uma natureza global.

A necessidade de se utilizar o processo de integração implícita deve-se ao facto de não se conhecer, *a priori*, a fracção de natureza plástica do incremento actual do tensor das deformações $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^{i+1}$. Neste contexto, numa primeira fase — previsão elástica — assume-se que o incremento actual do tensor das deformações é totalmente elástico, sendo o estado de tensão calculado com base na

lei de comportamento elástico. Posteriormente, verifica-se, com base no critério de cedência, se o estado de tensão obtido se encontra na superfície de limite de elasticidade ou no seu interior. Em caso afirmativo, a hipótese de o incremento actual do tensor das deformações ser totalmente elástico é verdadeira, sendo correcto o estado de tensão obtido. Em caso negativo, o hipotético estado de tensão encontra-se no exterior da superfície de limite de elasticidade, o que, de acordo com a teoria da plasticidade, não é admissível. Isto significa que ocorreu o fenómeno de plasticidade, sendo necessário prosseguir para uma segunda fase do processo numérico — correcção plástica —, em que o novo estado (admissível) de tensão é determinado com base num processo de retorno à superfície de limite de elasticidade.

12.7.1.7 Algoritmo de retorno radial

Considerando a relação 12.6, a equação 12.8 corresponde, para a iteração $i + 1$, $i \in \mathbb{N}_0$, de um pseudo-instante incremental $t + \Delta t$, a

$$\sigma_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{D} : \left[(\epsilon_t + \Delta \epsilon_{t+\Delta t}^{i+1}) - (\epsilon_t^p + \Delta \epsilon_{t+\Delta t}^{p,i+1}) \right]. \quad (12.77)$$

O processo de previsão elástica consiste, tal como foi referido, em considerar que o incremento do tensor das deformações $\Delta \epsilon_{t+\Delta t}^{i+1}$ é totalmente elástico, pelo que os incrementos do tensor das deformações plásticas, $\Delta \epsilon_{t+\Delta t}^{p,i+1}$, e da deformação plástica equivalente, $\Delta \bar{\epsilon}_{t+\Delta t}^{p,i+1}$, são nulos. Assim, o estado de tensão elástica é caracterizado pelo tensor das tensões-tentativa, definido por

$$\sigma^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{D} : \left[(\epsilon_t + \Delta \epsilon_{t+\Delta t}^{i+1}) - \epsilon_t^p \right]. \quad (12.78)$$

No caso de se verificar a condição

$$f(\sigma^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}, \bar{\epsilon}_t^p) = \bar{\sigma}(\sigma^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}) - \sigma_Y(\bar{\epsilon}_t^p) \leq 0, \quad (12.79)$$

a hipótese de o incremento do tensor das deformações $\Delta \epsilon_{t+\Delta t}^{i+1}$ ser totalmente elástico é verdadeira, pelo que, em termos de actualização de variáveis, se tem

$$\begin{cases} \sigma_{t+\Delta t}^{i+1} = \sigma^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1} \\ \epsilon_{t+\Delta t}^{p,i+1} = \epsilon_t^p \\ \bar{\epsilon}_{t+\Delta t}^{p,i+1} = \bar{\epsilon}_t^p \end{cases}. \quad (12.80)$$

No entanto, se, pelo contrário, se tem que

$$f\left(\sigma_{t+\Delta t}^{te|i+1}, \bar{\varepsilon}_t^p\right) = \bar{\sigma}\left(\sigma_{t+\Delta t}^{te|i+1}\right) - \sigma_Y(\bar{\varepsilon}_t^p) > 0, \quad (12.81)$$

então a hipótese de o incremento do tensor das deformações $\Delta\varepsilon_{t+\Delta t}^{i+1}$ ser totalmente elástico é falsa. Deste modo, ocorreu a formação de deformação plástica, pelo que é necessário proceder à fase de correcção plástica, determinando-se o estado de tensão que verifique o critério de cedência, isto é, um estado de tensão tal que

$$f\left(\sigma_{t+\Delta t}^{i+1}, \bar{\varepsilon}_{t+\Delta t}^{p|i+1}\right) = 0.$$

Atendendo à equação 12.78, a equação 12.77 corresponde a

$$\sigma_{t+\Delta t}^{i+1} = \sigma_{t+\Delta t}^{te|i+1} - \mathbf{D} : \Delta\varepsilon_{t+\Delta t}^{p|i+1}. \quad (12.82)$$

Tomando em consideração os caracteres quer linear e isotrópico do comportamento elástico quer desviador e simétrico de $\Delta\varepsilon_{t+\Delta t}^{p|i+1}$, a equação 12.82 resulta em

$$\sigma_{t+\Delta t}^{i+1} = \sigma_{t+\Delta t}^{te|i+1} - 2G \Delta\varepsilon_{t+\Delta t}^{p|i+1}, \quad (12.83)$$

em que G é o módulo de elasticidade transversal, pelo que

$$\frac{1}{3} \text{tr}(\sigma_{t+\Delta t}^{i+1}) \mathbf{I} = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma_{t+\Delta t}^{te|i+1}) \mathbf{I}. \quad (12.84)$$

Assim, de acordo com a equação 12.78, a componente hidrostática do tensor das tensões não constitui uma incógnita na fase de correcção plástica do algoritmo de retorno radial. Deste modo, basta proceder-se ao cálculo da componente desviadora do tensor das tensões, que, de acordo com as equações 12.11, 12.83 e 12.84, corresponde a

$$\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{s}_{t+\Delta t}^{te|i+1} - 2G \Delta\varepsilon_{t+\Delta t}^{p|i+1}. \quad (12.85)$$

Por outro lado, a equação 12.21 corresponde, em termos incrementais, a

$$\Delta\varepsilon_{t+\Delta t}^{p|i+1} = \Delta\Lambda_{t+\Delta t}^{i+1}. \quad (12.86)$$

Deste modo, a discretização da equação 12.20 corresponde, após a substituição da expressão 12.86, a

$$\Delta \epsilon^p|_{t+\Delta t}^{i+1} = \Delta \bar{\epsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1} \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{\mathbf{n}}_{t+\Delta t}^{i+1}. \quad (12.87)$$

Atendendo às expressões 12.12, 12.18 e 12.20, a substituição da equação 12.87 na equação 12.85 resulta em

$$\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{s}^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1} - \sqrt{6}G \Delta \bar{\epsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1} \frac{\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{i+1}}{\|\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{i+1}\|} \quad (12.88)$$

ou, de modo equivalente, em

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}^{i+1}) \hat{\mathbf{n}}_{t+\Delta t}^{i+1} = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}) \hat{\mathbf{n}}^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1} - 3G \Delta \bar{\epsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1} \hat{\mathbf{n}}_{t+\Delta t}^{i+1}. \quad (12.89)$$

Nesta equação, $\hat{\mathbf{n}}^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}$ é um tensor unitário normal e exterior à superfície de limite de elasticidade, que corresponde a

$$\hat{\mathbf{n}}^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1} = \frac{\mathbf{s}^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}}{\|\mathbf{s}^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}\|}. \quad (12.90)$$

A equação 12.88 define, em termos das tensões desviadoras, a fase de correcção plástica do algoritmo de retorno radial, cuja representação esquemática, no plano desviador Π , se encontra ilustrada na Figura 12.26. A correspondente interpretação geométrica do algoritmo de retorno radial no espaço das tensões principais encontra-se ilustrada na Figura 12.27.

Por outro lado, a relação 12.89 implica, em termos tensoriais, que

$$\hat{\mathbf{n}}_{t+\Delta t}^{i+1} = \hat{\mathbf{n}}^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}. \quad (12.91)$$

Deste modo, tem-se, em termos estritamente escalares, que

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}^{i+1}) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}) - 3G \Delta \bar{\epsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1}. \quad (12.92)$$

No entanto, de acordo com a equação 12.16, o critério de cedência obriga a que

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}^{i+1}, \bar{\epsilon}_t^p + \Delta \bar{\epsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1}) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}^{i+1}) - \sigma_Y^0 - H(\bar{\epsilon}_t^p + \Delta \bar{\epsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1}) = 0, \quad (12.93)$$

pelo que o incremento da deformação plástica equivalente corresponde, de acordo com a equação 12.92, ao seguinte:

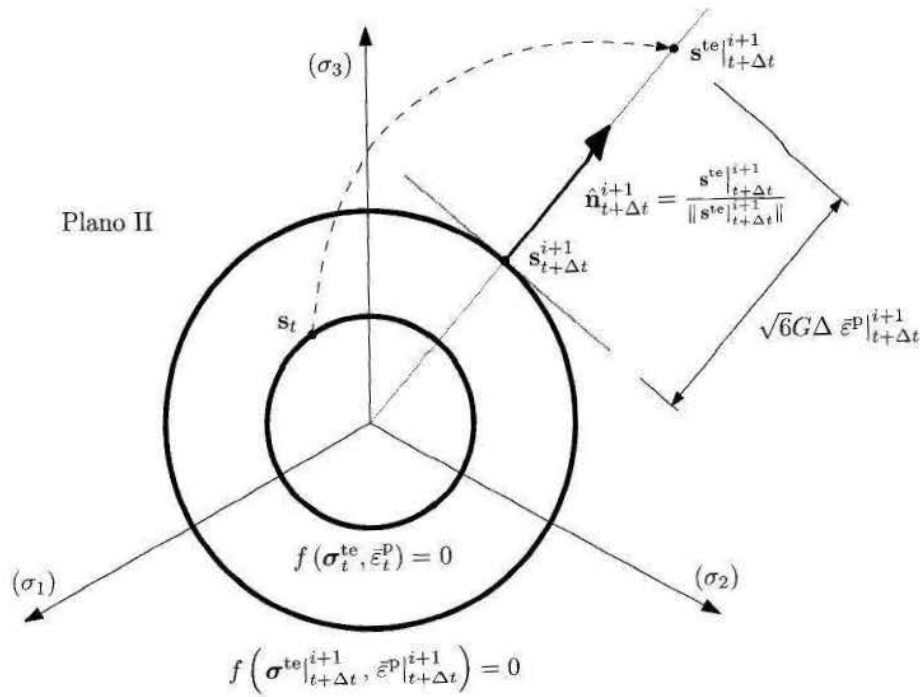


Figura 12.26 Representação esquemática, no plano desviador II, do algoritmo de retorno radial associado ao modelo de elastoplasticidade clássica.

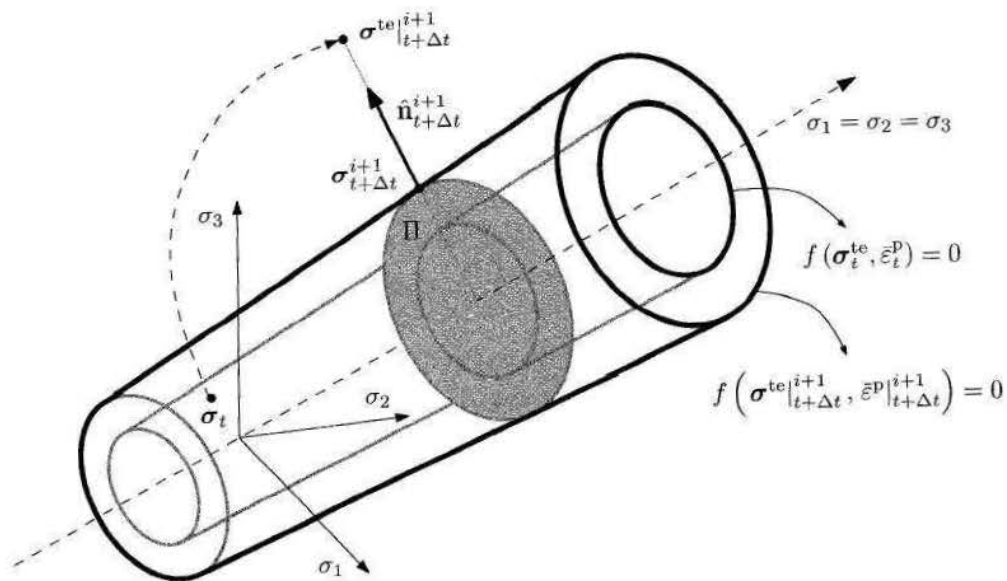


Figura 12.27 Interpretação geométrica, no espaço das tensões principais, do algoritmo de retorno radial associado ao modelo de elastoplasticidade clássica.

$$\Delta \bar{\epsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1} = \frac{\bar{\sigma}(\sigma^{te}|_{t+\Delta t}^{i+1}) - \sigma_Y^0 - H \bar{\epsilon}_t^p}{3G + H}. \quad (12.94)$$

No caso de se considerar uma lei de encruamento isotrópico não-linear, a equação associada ao critério de cedência (análoga à expressão 12.93) resulta não-linear. Deste modo, a sua resolução pode ser efectuada recorrendo ao método de Newton-Raphson. Nesta situação, as iterações são geralmente denominadas locais, em oposição às iterações associadas à resolução da equação de equilíbrio discretizada, que são denominadas globais. De acordo com o exposto, a actualização das variáveis associadas à fase de correcção plástica pode ser obtida pelas seguintes relações:

$$\begin{cases} \bar{\epsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1} = \bar{\epsilon}_t^p + \Delta \bar{\epsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1} \\ \bar{\sigma}(\sigma_{t+\Delta t}^{i+1}) = \sigma_Y^0 + H \bar{\epsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1} \\ \mathbf{s}_{t+\Delta t}^{i+1} = \bar{\sigma}(\sigma_{t+\Delta t}^{i+1}) \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\mathbf{n}}^{te}|_{t+\Delta t}^{i+1} \\ \sigma_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{s}_{t+\Delta t}^{i+1} + \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma^{te}|_{t+\Delta t}^{i+1}) \mathbf{I} \\ \epsilon^p|_{t+\Delta t}^{i+1} = \epsilon_t^p + \Delta \bar{\epsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1} \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{\mathbf{n}}^{te}|_{t+\Delta t}^{i+1} \end{cases}. \quad (12.95)$$

O algoritmo de integração implícita da lei de comportamento elastoplástico — algoritmo de retorno radial —, implementado para a resolução de problemas mecânicos de elastoplasticidade quase-estática, encontra-se ilustrado na Tabela 12.2.

12.7.1.8 Módulo elastoplástico consistente

Em termos gerais, a necessidade da substituição da matriz elastoplástica tangente pela matriz elastoplástica consistente advém, em última instância, da natureza discreta do método dos elementos finitos, nomeadamente do facto de este método envolver a utilização de incrementos finitos das variáveis associadas ao problema numérico. De facto, a consideração, na resolução de problemas pseudotemporalmente discretizados, da matriz elastoplástica tangente, que é definida em termos de relações incrementais de natureza infinitesimal, pode resultar num processo numérico que não se revele óptimo do ponto de vista computacional. Neste caso, a utilização de uma matriz tangente constitutiva, com a qual se tomem em consideração não só as características gerais da matriz

Tabela 12.2 Algoritmo de integração implícita da lei de comportamento elastoplástico — algoritmo de retorno radial — para o problema de elastoplasticidade quase-estática.

Para a iteração $i + 1$, $i \in \mathbb{N}_0$ do método de Newton-Raphson:

1. Previsão elástica — cálculo de:

$$1.1 \quad \sigma^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{D} : (\varepsilon|_{t+\Delta t}^{i+1} - \varepsilon_t^p)$$

$$1.2 \quad \mathbf{s}^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1} = \sigma^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1} - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}) \mathbf{I}$$

$$1.3 \quad \|\mathbf{s}^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}\| = \sqrt{\mathbf{s}^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1} : \mathbf{s}^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}}$$

$$1.4 \quad \bar{\sigma}(\sigma^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s}^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}\|$$

$$1.5 \quad f(\sigma^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}, \bar{\varepsilon}_t^p) = \bar{\sigma}(\sigma^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}) - \sigma_Y(\bar{\varepsilon}_t^p)$$

2. Se $f(\sigma^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}, \bar{\varepsilon}_t^p) \leq 0$, ENTÃO actualização de:

$$2.1 \quad \sigma_{t+\Delta t}^{i+1} = \sigma^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}$$

$$2.2 \quad \varepsilon^p|_{t+\Delta t}^{i+1} = \varepsilon_t^p$$

$$2.3 \quad \bar{\varepsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1} = \bar{\varepsilon}_t^p$$

3. SENÃO — correcção plástica — cálculo de:

$$3.1 \quad \hat{\mathbf{n}}|_{t+\Delta t}^{i+1} = \frac{\mathbf{s}^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}}{\|\mathbf{s}^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}\|}$$

$$3.2 \quad \Delta \bar{\varepsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1} = \frac{\bar{\sigma}(\sigma^{\text{te}}|_{t+\Delta t}^{i+1}) - \sigma_Y(\bar{\varepsilon}^p)}{3G + H}$$

$$3.3 \quad \Delta \varepsilon^p|_{t+\Delta t}^{i+1} = \Delta \bar{\varepsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1} \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{\mathbf{n}}|_{t+\Delta t}^{i+1}$$

3.4 Actualização de:

$$3.4.1 \quad \bar{\varepsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1} = \bar{\varepsilon}_t^p + \Delta \bar{\varepsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1}$$

$$3.4.2 \quad \bar{\sigma}(\sigma_{t+\Delta t}^{i+1}) = \sigma_Y^0 + H \bar{\varepsilon}^p|_{t+\Delta t}^{i+1}$$

$$3.4.3 \quad \mathbf{s}_{t+\Delta t}^{i+1} = \bar{\sigma}(\sigma_{t+\Delta t}^{i+1}) \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\mathbf{n}}|_{t+\Delta t}^{i+1}$$

$$3.4.4 \quad \sigma_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{s}_{t+\Delta t}^{i+1} + \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma_{t+\Delta t}^{i+1}) \mathbf{I}$$

$$3.4.5 \quad \varepsilon^p|_{t+\Delta t}^{i+1} = \varepsilon_t^p + \Delta \varepsilon^p|_{t+\Delta t}^{i+1}$$

elastoplástica tangente mas também as peculiaridades associadas à utilização de técnicas de discretização (finita) pseudotemporal, permite otimizar o desempenho numérico do método de Newton-Raphson, ao garantir a sua convergência quadrática. Neste contexto, considera-se a matriz elastoplástica consistente como matriz tangente constitutiva do comportamento elastoplástico. Tal como foi anteriormente referido, esta matriz corresponde, em termos tensoriais, ao módulo elastoplástico consistente, que é definido por

$$\hat{\mathbf{D}}^{\text{ep}} \Big|_{t+\Delta t}^{i+1} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{t+\Delta t}^{i+1} \quad (12.96)$$

ou, de acordo com a equação 12.76, por

$$\hat{\mathbf{D}}^{\text{ep}} \Big|_{t+\Delta t}^{i+1} = \frac{\partial F(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^{i+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t^{\text{p}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{\text{p}})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{t+\Delta t}^{i+1}. \quad (12.97)$$

De modo a obter a expressão do módulo elastoplástico consistente, efectuem-se as diferenciações da relação constitutiva 12.77, da lei de plasticidade 12.87 e do critério de cedência 12.93, que, tendo em consideração as equações 12.22 e 12.86, correspondem a

$$d\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{D} : \left(d\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^{i+1} - d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} \Big|_{t+\Delta t}^{i+1} \right), \quad (12.98)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} \Big|_{t+\Delta t}^{i+1} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{t+\Delta t}^{i+1} d\Lambda_{t+\Delta t}^{i+1} + \Delta \Lambda_{t+\Delta t}^{i+1} \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \Big|_{t+\Delta t}^{i+1} : d\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}^{i+1} \quad (12.99)$$

e

$$df \left(\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}^{i+1}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{\text{p}} + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{t+\Delta t}^{i+1} \right) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{t+\Delta t}^{i+1} : d\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}^{i+1} - H d\Lambda_{t+\Delta t}^{i+1} = 0, \quad (12.100)$$

respectivamente. Manipulando as relações 12.100 obtém-se

$$d\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{D}_* : \left(d\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^{i+1} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{t+\Delta t}^{i+1} d\Lambda_{t+\Delta t}^{i+1} \right), \quad (12.101)$$

em que

$$\mathbf{D}_* = \left(\mathfrak{S} + \mathbf{D} : \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \Big|_{t+\Delta t}^{i+1} \Delta \Lambda_{t+\Delta t}^{i+1} \right)^{-1} : \mathbf{D}, \quad (12.102)$$

sendo $\mathfrak{S}$ um tensor identidade não-geral de quarta ordem, cujas componentes correspondem a $\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, em que δ_{ij} é o símbolo de delta de Kronecker, com $i, j, k, l = 1, \dots, 3$. A resolução da equação 12.100 em ordem a $d\Lambda_{t+\Delta t}^{i+1}$, após a substituição da relação 12.101, resulta no seguinte:

$$d\Lambda_{t+\Delta t}^{i+1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma}|_{t+\Delta t}^{i+1} : \mathbf{D}_* : d\epsilon_{t+\Delta t}^{i+1}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma}|_{t+\Delta t}^{i+1} : \mathbf{D}_* : \frac{\partial f}{\partial \sigma}|_{t+\Delta t}^{i+1} + H}. \quad (12.103)$$

Atenda-se ao facto de o tensor $\mathfrak{S}$ corresponder a um tensor identidade única e exclusivamente no contexto da sua multiplicação tensorial de dupla contracção (ver Capítulo 3) por um tensor de segunda ordem simétrico. Na realidade, a multiplicação tensorial de dupla contracção de $\mathfrak{S}$ por um tensor geral de segunda ordem resulta na componente simétrica deste último e não no próprio tensor de segunda ordem. Por outro lado, as diferenciações são efectuadas atendendo ao facto de que, para a iteração $i+1$, $i \in \mathbb{N}_0$, de um pseudo-instante incremental $t + \Delta t$, o diferencial de uma variável é igual ao diferencial do incremento dessa variável, isto é, $d|_{t+\Delta t}^{i+1} = d(\Delta \cdot)^{i+1}_{t+\Delta t}$.

Substituindo a expressão 12.103 na equação 12.101 e considerando a equação 12.96, tem-se que

$$\hat{\mathbf{D}}^{\text{ep}}|_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{D}_* - \bar{\varrho}_{t+\Delta t}^{i+1} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma}|_{t+\Delta t}^{i+1} : \mathbf{D}_* \otimes \mathbf{D}_* : \frac{\partial f}{\partial \sigma}|_{t+\Delta t}^{i+1}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma}|_{t+\Delta t}^{i+1} : \mathbf{D}_* : \frac{\partial f}{\partial \sigma}|_{t+\Delta t}^{i+1} + H}, \quad (12.104)$$

ou, em notação matricial, que

$$\hat{\mathbf{D}}^{\text{ep}}|_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{D}_* - \bar{\varrho}_{t+\Delta t}^{i+1} \frac{\mathbf{D}_*^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}|_{t+\Delta t}^{i+1} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T|_{t+\Delta t}^{i+1} \mathbf{D}_*}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T|_{t+\Delta t}^{i+1} \mathbf{D}_* \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}|_{t+\Delta t}^{i+1} + H}, \quad (12.105)$$

com

$$\bar{\varrho}_{t+\Delta t}^{i+1} = \begin{cases} 0 & \Delta \Lambda_{t+\Delta t}^{i+1} = 0 \\ 1 & \Delta \Lambda_{t+\Delta t}^{i+1} > 0 \end{cases}. \quad (12.106)$$

Assim, de acordo com as equações 12.32 e 12.104 verifica-se que o módulo elastoplástico consistente difere do módulo elastoplástico tangente. No entanto, de acordo com a relação 12.102 constata-se que o módulo elastoplástico consistente degenera no módulo tangente para valores infinitesimais do incremento do multiplicador plástico $\Delta \Lambda_{t+\Delta t}^{i+1}$, tal como seria de esperar. Além disso, atendendo a

que $\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$, tem-se que a variação da normal à superfície de limite de elasticidade, $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$, num determinado incremento pseudotemporal, é tomada em consideração durante o processo iterativo.

12.7.2 Análise dinâmica: Condução transitória de calor

12.7.2.1 Formulação diferencial do problema

A transmissão de calor em meios sólidos faz-se no seu interior, por condução, ou através da sua fronteira. A equação que descreve a transmissão de calor num meio sólido $\Omega \in \mathbb{R}^3$ no intervalo de tempo $]0, t_f]$ corresponde, considerando um referencial cartesiano ortonormado, a

$$\rho c \dot{T} + \text{div}(\mathbf{q}_k) - Q = 0 \quad \text{em } \Omega \times]0, t_f], \quad (12.107)$$

em que ρ e c são a massa e o calor específicos, respectivamente, $\dot{T}$ é a taxa de variação temporal do campo de temperaturas T , $\mathbf{q}_k$ é o vector de fluxos superficiais, isto é, por unidade de área, de calor por condução e Q representa a taxa temporal de geração de calor por unidade de volume. O meio sólido ocupa o conjunto aberto $\Omega \in \mathbb{R}^3$, delimitado pela fronteira Γ . A resolução do problema térmico corresponde à determinação de T em $\bar{\Omega} \times]0, t_f]$, sendo $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ o fecho de Ω .

Assumindo que a condução de calor no material segue a lei de Fourier, tem-se que

$$\mathbf{q}_k = -\mathbf{k} \cdot \text{grad}(T) \quad \text{em } \Omega \times]0, t_f], \quad (12.108)$$

em que $\mathbf{k}$ e $\text{grad}(T)$ são o tensor de condutividade térmica e o gradiente do campo de temperaturas, respectivamente. Substituindo a equação 12.108 na relação 12.107, obtém-se

$$\rho c \dot{T} - \text{div}[\mathbf{k} \cdot \text{grad}(T)] - Q = 0 \quad \text{em } \Omega \times]0, t_f]. \quad (12.109)$$

A resolubilidade da equação 12.109 exige a imposição da condição inicial e das condições de fronteira associadas ao problema térmico. A condição inicial do problema térmico corresponde à definição, no domínio Ω , do campo inicial de temperaturas

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega. \quad (12.110)$$

Em geral, para o problema térmico podem considerar-se condições de fronteira de Dirichlet, de Neumann e de Robin. Estas são definidas nas superfícies Γ_D , Γ_N e $\Gamma_R = \Gamma_{R1} \cup \Gamma_{R2}$, respectivamente, com $\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R = \Gamma$ e $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \Gamma_D \cap \Gamma_R = \Gamma_N \cap \Gamma_R = \emptyset$, tal como se ilustra na Figura 12.28.

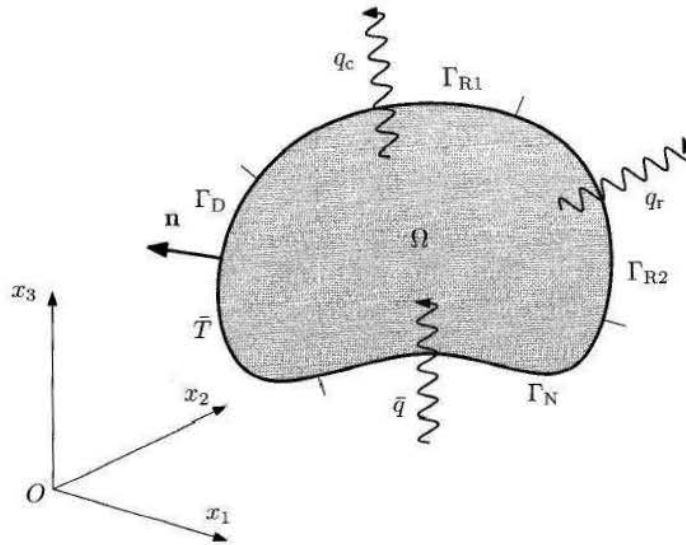


Figura 12.28 Representação esquemática das condições de fronteira associadas ao problema térmico num corpo sólido Ω .

As condições de fronteira de Dirichlet correspondem a

$$T = \bar{T} \text{ em } \Gamma_D \times]0, t_f], \quad (12.111)$$

em que $\bar{T}$ é a temperatura prescrita na superfície Γ_D . Por outro lado, as condições de fronteira de Neumann, definidas por

$$-\bar{q} = [-\mathbf{k} \cdot \text{grad}(T)] \cdot \mathbf{n} \text{ em } \Gamma_N \times]0, t_f], \quad (12.112)$$

representam a prescrição do fluxo superficial de calor $\bar{q}$ na superfície Γ_N , sendo $\mathbf{n}$ um versor normal exterior à superfície Γ . O sinal negativo associado à condição de fronteira de fluxo superficial prescrito advém da convenção de que $\bar{q}$ é positivo quando a transferência de calor se efectua do exterior para o interior do domínio Ω considerado, conforme se mostra na Figura 12.28. Por fim, as condições de fronteira de Robin

$$q_c = [-\mathbf{k} \cdot \text{grad}(T)] \cdot \mathbf{n} = h_c(T - T_\infty) \text{ em } \Gamma_{R1} \times]0, t_f] \quad (12.113)$$

e

$$q_r = [-\mathbf{k} \cdot \text{grad}(T)] \cdot \mathbf{n} = \kappa_r(T - T_r) \quad \text{em } \Gamma_{R2} \times]0, t_f] \quad (12.114)$$

correspondem a condições de fronteira de convecção e de radiação nas superfícies Γ_{R1} e Γ_{R2} , respectivamente, e h_c e T_∞ são o coeficiente de convecção e a temperatura do meio ambiente, respectivamente. O coeficiente de radiação é definido por

$$\kappa_r = \gamma_r(T'^2 + T_r'^2)(T' + T_r'), \quad (12.115)$$

em que T' e T_r' são as temperaturas absolutas da superfície Γ_{R2} e da superfície da fonte de radiação, respectivamente. O coeficiente γ_r depende quer da constante de Stefan-Boltzman quer das emissividades e dos factores de forma das superfícies intervenientes na troca de calor por radiação. Por uma questão de simplificação e sem perda de generalidade, as superfícies Γ_{R1} e Γ_{R2} são consideradas disjuntas, isto é, tais que $\Gamma_{R1} \cap \Gamma_{R2} = \emptyset$, conforme se mostra na Figura 12.28. No entanto, numa situação geral, os fenómenos de convecção e de radiação podem coexistir simultaneamente em Γ_R , sendo $\Gamma_{R1} \cap \Gamma_{R2} \neq \emptyset$.

Atenda-se ao facto de a expressão 12.114 corresponder a uma modelação simplificada do fenómeno de radiação. De facto, esta não contempla fenómenos mais complexos, tais como, por exemplo, trocas de calor por radiação entre superfícies da mesma região, ou entre uma região e a sua vizinhança. Refira-se, ainda, que na abordagem apresentada do problema térmico não foram considerados quaisquer fenómenos de convecção no meio Ω , de mudança de fase, de acoplamento termomecânico, de contacto térmico ou de transmissão de calor entre múltiplos materiais. No caso de existirem n materiais distintos em Ω , o problema térmico consiste em n equações análogas à equação 12.107. Todavia, para além das condições de fronteira já consideradas, deverão impor-se, ainda, condições de continuidade de temperaturas e de fluxos superficiais em quaisquer das interfaces entre os vários subdomínios definidos por cada material.

A resolução numérica do problema térmico associado à equação diferencial 12.109 com base no método dos elementos finitos requer a obtenção da sua formulação integral fraca.

12.7.2.2 Formulação integral fraca do problema térmico

No que se segue, utiliza-se o princípio das temperaturas virtuais para se obter a formulação integral fraca do problema térmico. Este princípio é análogo ao princípio dos deslocamentos virtuais, utilizado anteriormente nesta obra.

Seja δT um campo arbitrário de temperaturas virtuais contínuo e suficientemente regular em Ω para $t \in]0, t_f]$, com $\delta T = 0$ em $\Gamma_D \times]0, t_f]$. Neste contexto, multiplicando a equação de equilíbrio 12.109 pelo campo δT e integrando no domínio Ω , obtém-se

$$\int_{\Omega} \delta T [\rho c \dot{T} - \operatorname{div} [\mathbf{k} \cdot \operatorname{grad}(T)] - Q] d\Omega = 0. \quad (12.116)$$

Devido à natureza arbitrária do campo de temperaturas virtuais tem-se que a formulação integral forte 12.116 é equivalente à formulação diferencial 12.109 — formulação forte. Substituindo na equação 12.116 a seguinte identidade:

$$\delta T \operatorname{div} [\mathbf{k} \cdot \operatorname{grad}(T)] = \operatorname{div} [\delta T \mathbf{k} \cdot \operatorname{grad}(T)] - \operatorname{grad}(\delta T) \cdot [\mathbf{k} \cdot \operatorname{grad}(T)] \quad (12.117)$$

e reorganizando os seus termos, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta T \rho c \dot{T} d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{grad}(\delta T) \cdot [\mathbf{k} \cdot \operatorname{grad}(T)] d\Omega \\ = \int_{\Omega} \delta T Q d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} [\delta T \mathbf{k} \cdot \operatorname{grad}(T)] d\Omega. \end{aligned} \quad (12.118)$$

A aplicação do teorema da divergência (ver equação 6.48) ao último termo do segundo membro da equação 12.118 resulta em

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} [\delta T \mathbf{k} \cdot \operatorname{grad}(T)] d\Omega = \int_{\Gamma} \delta T [\mathbf{k} \cdot \operatorname{grad}(T)] \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (12.119)$$

No entanto, sendo $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_{R1} \cup \Gamma_{R2}$ e $\delta T = 0$ em Γ_D , tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \delta T [\mathbf{k} \cdot \operatorname{grad}(T)] \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_N} \delta T [\mathbf{k} \cdot \operatorname{grad}(T)] \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_{R1}} \delta T [\mathbf{k} \cdot \operatorname{grad}(T)] \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{R2}} \delta T [\mathbf{k} \cdot \operatorname{grad}(T)] \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \end{aligned} \quad (12.120)$$

A substituição das equações 12.112 a 12.114, 12.119 e 12.120 na equação 12.118 resulta em

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta T \rho c \dot{T} d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{grad}(\delta T) \cdot [\mathbf{k} \cdot \operatorname{grad}(T)] d\Omega = \int_{\Omega} \delta T Q d\Omega + \int_{\Gamma_N} \delta T \bar{q} d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_{R1}} \delta T h_c (T - T_{\infty}) d\Gamma - \int_{\Gamma_{R2}} \delta T \kappa_r (T - T_r) d\Gamma. \end{aligned} \quad (12.121)$$

Reorganizando algebricamente a equação anterior, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta T \rho c \dot{T} d\Omega + \int_{\Omega} \text{grad}(\delta T) \cdot [\mathbf{k} \cdot \text{grad}(T)] d\Omega + \int_{\Gamma_{R1}} \delta T h_c T d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_{R2}} \delta T \kappa_r T d\Gamma = \int_{\Omega} \delta T Q d\Omega + \int_{\Gamma_N} \delta T \bar{q} d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_{R1}} \delta T h_c T_{\infty} d\Gamma + \int_{\Gamma_{R2}} \delta T \kappa_r T_r d\Gamma. \end{aligned} \quad (12.122)$$

A equação integral de equilíbrio de fluxos de calor 12.122 corresponde ao princípio das temperaturas virtuais para o problema térmico associado à equação 12.109. Segundo este princípio, para que T — um campo de temperaturas contínuo e suficientemente regular em Ω , com $T = \bar{T}$ em $\Gamma_D \times]0, t_f]$ — seja a solução do problema térmico, a equação 12.122 deverá verificar-se, em qualquer instante $t \in]0, t_f]$, para qualquer campo arbitrário de temperaturas virtuais δT contínuo e suficientemente regular em Ω , com $\delta T = 0$ em $\Gamma_D \times]0, t_f]$.

Uma vez determinada a formulação fraca do problema térmico procede-se à sua semidiscretização espacial por elementos finitos.

12.7.2.3 Semidiscretização espacial por elementos finitos

Procedendo à decomposição do domínio Ω numa malha de elementos finitos, aproxima-se o campo global de temperaturas por

$$T(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \mathbf{T}(t) \quad \text{em } \Omega \times]0, t_f] \quad (12.123)$$

e

$$T(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{N}}_{\Gamma}(\mathbf{x}) \mathbf{T}(t) \quad \text{em } \Gamma \times]0, t_f]. \quad (12.124)$$

Nesta equação, $\tilde{\mathbf{N}}$ e $\tilde{\mathbf{N}}_{\Gamma}$ constituem as matrizes globais de funções de forma (isto é, de interpolação) no domínio Ω e na superfície Γ , respectivamente. Nas equações anteriores, $\mathbf{T}$ é o vector das temperaturas nodais, em que as componentes relativas aos nós associados a Γ_D correspondem a valores de temperatura prescrita. A derivação de ambos os membros da equação 12.123 em relação ao tempo permite aproximar o campo global das taxas de variação temporal de temperatura por

$$\dot{T}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{T}}(t) \quad \text{em } \Omega \times]0, t_f], \quad (12.125)$$

em que $\dot{\mathbf{T}}$ é o vector das taxas nodais de variação temporal de temperatura. Por outro lado, na discretização espacial assume-se que o campo global de temperaturas virtuais é aproximado por

$$\delta T(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{T}(t) \quad \text{em } \Omega \times]0, t_f] \quad (12.126)$$

e

$$\delta T(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{N}}_\Gamma(\mathbf{x}) \delta \mathbf{T}(t) \quad \text{em } \Gamma \times]0, t_f], \quad (12.127)$$

em que $\delta \mathbf{T}$ corresponde ao vector das temperaturas virtuais nodais, sendo nulas as componentes relativas aos nós associados a Γ_D . Neste contexto, a substituição das equações 12.123 a 12.127 na equação 12.122 permite obter, atendendo à arbitrariedade do campo de temperaturas virtuais e utilizando notação matricial, a equação semidiscretizada

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{Q} + \mathbf{f}. \quad (12.128)$$

A equação 12.128 diz-se semidiscretizada por aproximar a equação diferencial 12.109 de modo discreto no espaço, mas de modo contínuo no tempo, conforme as equações 12.123 a 12.127. Deste modo, diz-se que a equação 12.128 define um problema semidiscretizado. $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$ correspondem às matrizes de capacidade e de rigidez térmicas, respectivamente, e $\mathbf{K}$ é constituída pelos termos de condutividade térmica, $\mathbf{K}_k$, de convecção, $\mathbf{K}_c$, e de radiação, $\mathbf{K}_r$, sendo $\mathbf{Q}$ o vector dos termos de geração de calor. Finalmente, $\mathbf{f}$ é o vector dos fluxos prescritos e dos termos de convecção e de radiação associados às temperaturas exteriores do meio envolvente. Estas matrizes e estes vectores correspondem a

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}^T \rho c \tilde{\mathbf{N}} d\Omega, \quad (12.129)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_k + \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_r \\ &= \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{M}}^T \mathbf{k} \tilde{\mathbf{M}} d\Omega + \int_{\Gamma_{R1}} \tilde{\mathbf{N}}_\Gamma^T h_c \tilde{\mathbf{N}}_\Gamma d\Gamma + \int_{\Gamma_{R2}} \tilde{\mathbf{N}}_\Gamma^T \kappa_r \tilde{\mathbf{N}}_\Gamma d\Gamma, \end{aligned} \quad (12.130)$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}^T Q d\Omega \quad (12.131)$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= \mathbf{f}_N + \mathbf{f}_{PN} + \mathbf{f}_{R1} + \mathbf{f}_{R2} \\
&= \int_{\Gamma_N} \tilde{\mathbf{N}}_T^T \bar{q} d\Gamma + \sum_{k=1}^{n_q} (\bar{\mathbf{P}}_N)_k + \int_{\Gamma_{R1}} \tilde{\mathbf{N}}_T^T h_c T_\infty d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_{R2}} \tilde{\mathbf{N}}_T^T \kappa_r T_r d\Gamma,
\end{aligned} \tag{12.132}$$

em que $\tilde{\mathbf{M}}$ é a matriz global das derivadas parciais das funções de forma, ou seja, de interpolação do campo do gradiente de temperaturas. O vector $\mathbf{f}_{PN}$ representa o vector de fluxos pontuais (nodais), constituído por n_q fluxos prescritos $\bar{\mathbf{P}}_N$. Os fluxos pontuais (nodais) correspondem a fluxos aplicados em subsuperfícies infinitesimais de Γ_N . Estes foram omitidos, por uma questão de simplificação e sem perda de generalidade, na formulação diferencial do problema térmico.

Em geral, a equação 12.128 pode ser resolvida por técnicas de análise modal ou por métodos de integração temporal. No entanto, a utilização das técnicas de análise modal restringe-se usualmente à resolução de problemas transitórios lineares em que se pretende obter, para um intervalo de tempo considerável, uma solução dominada por apenas alguns dos modos próprios principais. Nas restantes situações são geralmente utilizados os métodos de integração temporal.

12.7.2.4 Discretização e integração temporais do problema térmico

O processo de discretização temporal consiste em considerar que a evolução temporal do processo se faz por incrementos discretos de tempo, Δt , e não de modo contínuo. Posteriormente à discretização temporal do problema procede-se a um processo recursivo — o método de integração temporal — em que, partindo da condição inicial, se obtêm as soluções para os instantes subsequentes. Os vários métodos de integração temporal podem ser baseados em um ou mais passos de tempo. No presente trabalho, procede-se à integração temporal do problema térmico recorrendo a um método baseado num só passo de tempo.

Uma vez que a equação 12.128 é uma equação diferencial de primeira ordem em $\mathbf{T}$, consideram-se funções de forma de primeira ordem, isto é, lineares, no tempo. Deste modo, variando o vector de temperaturas nodais de $\mathbf{T}_t$ para $\mathbf{T}_{t+\Delta t}$ no intervalo de tempo Δt , tem-se que, para cada componente de $\mathbf{T}$, as funções de forma temporais N_t e $N_{t+\Delta t}$ correspondem a

$$N_t(\tau) = 1 - \frac{\tau}{\Delta t} \quad (12.133)$$

e

$$N_{t+\Delta t}(\tau) = \frac{\tau}{\Delta t}, \quad (12.134)$$

em que τ é um parâmetro temporal, tal que $0 \leq \tau \leq \Delta t$. Neste contexto, assume-se que, entre os instantes de tempo t e $t + \Delta t$, o vector das temperaturas nodais varia linearmente de acordo com

$$\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{T}_t + \frac{\tau}{\Delta t} (\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t), \quad (12.135)$$

em que $\mathbf{T}_{t+\Delta t}$ corresponde ao termo que se pretende determinar. De acordo com as equações 12.133 e 12.134, tem-se que as taxas de variação temporal das funções de forma temporais N_t e $N_{t+\Delta t}$ são

$$\dot{N}_t(\tau) = -\frac{1}{\Delta t} \quad (12.136)$$

e

$$\dot{N}_{t+\Delta t}(\tau) = \frac{1}{\Delta t}, \quad (12.137)$$

respectivamente, pelo que o vector das taxas nodais de variação temporal de temperatura corresponde a

$$\dot{\mathbf{T}}(\tau) = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t). \quad (12.138)$$

Substituindo as equações 12.135 e 12.138 na equação 12.128, obtém-se

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} (\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t) + \mathbf{K} \mathbf{T}_t + \frac{\tau}{\Delta t} \mathbf{K} (\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t) = \mathbf{Q} + \mathbf{f}, \quad (12.139)$$

que corresponde à discretização temporal da equação 12.128.

A aplicação do método dos resíduos pesados à equação 12.139 no intervalo de tempo definido por $\tau \in [0, \Delta t]$ resulta em

$$\int_0^{\Delta t} W(\tau) \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} (\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t) + \mathbf{K} \mathbf{T}_t + \frac{\tau}{\Delta t} \mathbf{K} (\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t) - (\mathbf{Q} + \mathbf{f}) \right] d\tau = \mathbf{0}, \quad (12.140)$$

em que W é a função de peso. Admitindo que $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$ são constantes nesse intervalo de tempo, obtém-se

$$\left(\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C} + \Lambda\mathbf{K}\right)\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \left[\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C} - (1-\Lambda)\mathbf{K}\right]\mathbf{T}_t - (\bar{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{f}}) = \mathbf{0}, \quad (12.141)$$

em que o parâmetro Λ de ponderação de avanço da integração temporal e $\bar{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{f}}$ correspondem a

$$\Lambda = \frac{1}{\Delta t} \frac{\int_0^{\Delta t} W(\tau) \tau d\tau}{\int_0^{\Delta t} W(\tau) d\tau} \quad (12.142)$$

e

$$\bar{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{f}} = \frac{\int_0^{\Delta t} W(\tau) (\mathbf{Q} + \mathbf{f}) d\tau}{\int_0^{\Delta t} W(\tau) d\tau}, \quad (12.143)$$

respectivamente. Assumindo uma variação linear para $\mathbf{Q} + \mathbf{f}$ no intervalo de tempo definido por $\tau \in [0, \Delta t]$, isto é, considerando para $\mathbf{Q} + \mathbf{f}$ as mesmas funções de forma temporais que são consideradas para $\mathbf{T}$, tem-se que

$$(\mathbf{Q} + \mathbf{f})(\tau) = (\mathbf{Q}_t + \mathbf{f}_t) + \frac{\tau}{\Delta t} [(\mathbf{Q}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_{t+\Delta t}) - (\mathbf{Q}_t + \mathbf{f}_t)]. \quad (12.144)$$

A substituição das equações 12.143 e 12.144 em 12.141 resulta no seguinte:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C} + \Lambda\mathbf{K}\right)\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \left[\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C} - (1-\Lambda)\mathbf{K}\right]\mathbf{T}_t \\ - (1-\Lambda)(\mathbf{Q}_t + \mathbf{f}_t) - \Lambda(\mathbf{Q}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_{t+\Delta t}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (12.145)$$

As características do método de integração temporal dependem do valor selecionado para o parâmetro de ponderação de avanço da integração temporal, Λ , da equação 12.145. Na Tabela 12.3 são apresentados os métodos de integração temporal mais frequentemente utilizados, bem como os correspondentes valores de $\Lambda \in [0, 1]$, conforme a equação 12.142.

De entre os métodos apresentados, o de integração temporal explícito ($\Lambda = 0$) é aquele que permite a obtenção da solução da equação 12.145 de um modo mais simples. A equação discretizada do problema térmico associada ao método de integração explícito corresponde, de acordo com a equação 12.145, a

$$\left(\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \left(\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C} - \mathbf{K}\right)\mathbf{T}_t - (\mathbf{Q}_t + \mathbf{f}_t) = \mathbf{0}. \quad (12.146)$$

Tabela 12.3 Métodos de integração temporal e valores de Λ correspondentes.

Método de integração temporal	Λ
Explícito	0
Semi-implícito de Crank-Nicolson	1/2
Semi-implícito de Galerkin	2/3
Implícito	1

Embora este método conduza a soluções de modo imediato, apresenta a desvantagem de não só obrigar à utilização de incrementos de tempo reduzidos mas também de a solução numérica poder afastar-se da real, devido à acumulação de erros numéricos.

Por outro lado, os métodos semi-implícitos ou de gradiente progressivo permitem a utilização de incrementos de tempo significativamente maiores. No entanto, apenas o método implícito permite a obtenção de uma solução incondicionalmente estável em problemas térmicos não-lineares. Este facto advém da garantia de equilíbrio do sistema em qualquer instante: utiliza-se um ciclo iterativo no cálculo incremental para que, partindo de uma configuração t de equilíbrio, se atinja uma configuração de chegada $t + \Delta t$ também de equilíbrio. Este ciclo iterativo é realizado no intervalo $[t, t + \Delta t]$, assegurando-se quer a convergência da solução quer o equilíbrio correcto do sistema.

Neste contexto, considera-se um método de integração temporal implícito para a resolução da equação discretizada do problema térmico. Considerando a equação 12.145 com $\Lambda = 1$, obtém-se

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K}\right) \mathbf{T}_{t+\Delta t} - \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}\right) \mathbf{T}_t - (\mathbf{Q}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_{t+\Delta t}) = \mathbf{0}. \quad (12.147)$$

Deste modo, a equação discretizada do problema térmico associada a um método de integração implícito corresponde a

$$\mathbf{K}_G \mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{t+\Delta t} = \mathbf{0}, \quad (12.148)$$

em que

$$\mathbf{K}_G = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (12.149)$$

é a matriz global de rigidez térmica e

$$\mathbf{F}_{t+\Delta t} = \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{T}_t + \mathbf{Q}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_{t+\Delta t} \quad (12.150)$$

corresponde ao vector de fluxos equivalentes.

Por fim, refira-se que devido ao facto de na definição da matriz de capacidade térmica, $\mathbf{C}$, se utilizarem as mesmas funções de interpolação quer para a temperatura quer para a sua taxa temporal, a matriz $\mathbf{C}$ é dita consistente (ver equação 12.129). É também possível utilizar uma matriz reduzida de capacidade térmica. Neste caso, a capacidade térmica dos vários elementos finitos é concentrada nos seus nós, obtendo-se assim uma matriz diagonal de capacidade térmica. A sua utilização revela-se adequada e económica num esquema de integração explícito. No entanto, verifica-se que esta técnica pode levar a uma diminuição da precisão dos resultados obtidos. Por outro lado, a diagonalização de matrizes de capacidade térmica associadas a elementos finitos de ordem superior, além de não possuir suporte físico, pode originar, em certos algoritmos, efeitos adversos, tais como, por exemplo, a existência de elementos negativos nas suas diagonais. Neste contexto, optou-se unicamente pela utilização da matriz consistente de capacidade térmica.

12.7.2.5 Integração implícita da equação discretizada

Numa análise em regime transitório em que as componentes de $\mathbf{K}_G$ e de $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$ não dependam da temperatura e não haja trocas por radiação, a equação 12.148 é linear. Assim, partindo da condição inicial, a evolução temporal do processo prossegue por incrementos discretos de tempo, Δt , podendo a solução $\mathbf{T}_{t+\Delta t}$ ser obtida de modo directo, de acordo com as relações 12.130, 12.132 e 12.147, a partir da seguinte equação:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K}_k + \mathbf{K}_c \right) \mathbf{T}_{t+\Delta t} = \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{T}_t + \mathbf{Q} + \mathbf{f}_N + \mathbf{f}_{PN} + \mathbf{f}_{R1}. \quad (12.151)$$

No entanto, nas situações em que as componentes de $\mathbf{K}_G$ ou de $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$ dependam da temperatura, constata-se que a equação 12.148 é não-linear. A não-linearidade manifesta-se no facto de, após se obter o vector das temperaturas nodais $\mathbf{T}_{t+\Delta t}$ e se proceder à actualização da matriz $\mathbf{K}_G$ e do vector $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$, a equação 12.148 não se verificar. Deste modo, a não-linearidade da equação 12.148 resulta num resíduo

$$\mathbf{R}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \mathbf{K}_G \mathbf{T}_{t+\Delta t} \neq \mathbf{0}. \quad (12.152)$$

Este facto advém de, na dedução da equação 12.147, se ter admitido, no incremento de tempo Δt , a invariância quer de $\mathbf{C}$ quer de $\mathbf{K}$ e a variação linear de $\mathbf{Q} + \mathbf{f}$.

Deste modo, em vez de se resolver o problema transitório não-linear de modo unicamente incremental, procede-se em cada incremento à resolução de um sub-problema em que a solução é inicialmente aproximada de modo linear e posteriormente corrigida, se for necessário, recorrendo a um método iterativo. Neste contexto, define-se o resíduo

$$\mathbf{R}(\mathbf{T}) = \mathbf{F}(\mathbf{T}) - \mathbf{K}_G(\mathbf{T})\mathbf{T}. \quad (12.153)$$

O estado de equilíbrio térmico (ver equação 12.109) definido, no instante t , por $\mathbf{T}_t$, $\mathbf{K}_G|_t = \mathbf{K}_G(\mathbf{T}_t)$ e $\mathbf{F}_t = \mathbf{F}(\mathbf{T}_t)$, corresponde o resíduo

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{F}_t - \mathbf{K}_G|_t \mathbf{T}_t = \mathbf{0}. \quad (12.154)$$

O processo incremental consiste em considerar um novo estado para os fluxos equivalentes, definido por $\mathbf{F}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_t + \Delta \mathbf{F}_{t+\Delta t}$, e determinar $\Delta \mathbf{T}_{t+\Delta t}$, a partir da relação linear seguinte:

$$\mathbf{K}_G|_{t+\Delta t} \Delta \mathbf{T}_{t+\Delta t} - \Delta \mathbf{F}_{t+\Delta t} = \mathbf{0}. \quad (12.155)$$

No entanto, devido à natureza não-linear do problema, o valor obtido para $\mathbf{T}_{t+\Delta t} = \mathbf{T}_t + \Delta \mathbf{T}_{t+\Delta t}$ será

$$\mathbf{R}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \mathbf{K}_G|_{t+\Delta t} \mathbf{T}_{t+\Delta t} \neq \mathbf{0}. \quad (12.156)$$

O resíduo da equação 12.156 deverá ser, então, minimizado por recurso a um método iterativo. No método iterativo de Newton-Raphson assume-se um comportamento linear para o resíduo na vizinhança da solução previamente obtida. O desenvolvimento linear do resíduo na vizinhança de $\mathbf{T}$ para a iteração $i + 1$, $i \in \mathbb{N}_0$, de um instante incremental $t + \Delta t$ corresponde a

$$\mathbf{R}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{R}_{t+\Delta t}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{T}} \right|_{t+\Delta t}^i \delta \mathbf{T}_{t+\Delta t}^{i+1}. \quad (12.157)$$

Conforme se ilustra esquematicamente na Figura 12.29, por analogia com o procedimento esquematizado na Figura 12.24, com o método iterativo de Newton-Raphson procura-se melhorar a aproximação à solução, considerando que

$$\mathbf{R}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{0}, \quad (12.158)$$

em que as temperaturas nodais são actualizadas de acordo com

$$\mathbf{T}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{T}_{t+\Delta t}^i + \delta \mathbf{T}_{t+\Delta t}^{i+1}. \quad (12.159)$$

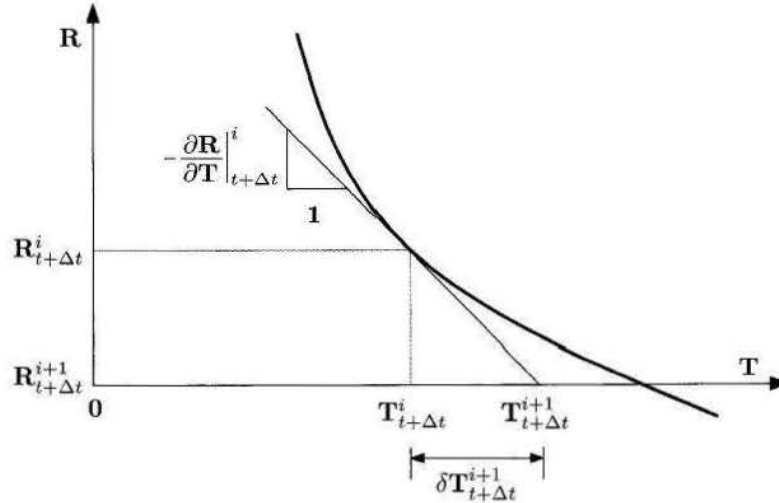


Figura 12.29 Representação unidimensional do processo de eliminação do resíduo no método de Newton-Raphson, na resolução implícita de problemas térmicos em regime transitório não-linear.

De acordo com a Figura 12.29, a matriz tangente à curva do resíduo — a matriz jacobiana de $\mathbf{R}$ — corresponde, para $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{t+\Delta t}^i$, a

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{T}} \right|_{t+\Delta t}^i = \frac{\mathbf{0} - \mathbf{R}_{t+\Delta t}^i}{\mathbf{T}_{t+\Delta t}^{i+1} - \mathbf{T}_{t+\Delta t}^i}. \quad (12.160)$$

Assim, as equações 12.159 e 12.160 permitem concluir que a equação da correcção iterativa das temperaturas nodais, em regime transitório não-linear, corresponde a

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{T}} \right|_{t+\Delta t}^i \delta \mathbf{T}_{t+\Delta t}^{i+1} = -\mathbf{R}_{t+\Delta t}^i. \quad (12.161)$$

No entanto, de acordo com a equação 12.153 tem-se que

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{T}} \right|_{t+\Delta t}^i = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{T}} \right|_{t+\Delta t}^i - \left. \frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial \mathbf{T}} \right|_{t+\Delta t}^i \mathbf{T}_{t+\Delta t}^i - \mathbf{K}_G|_{t+\Delta t}^i. \quad (12.162)$$

A equação 12.162 define a matriz jacobiana de $\mathbf{R}$ associada a uma linearização exacta do princípio das temperaturas virtuais em torno do último estado de temperaturas referente ao ciclo iterativo. No entanto, a utilização do método de Newton-Raphson em problemas térmicos resulta, geralmente, numa matriz jacobiana de $\mathbf{R}$ não-simétrica. Deste modo, é usual substituí-la, no processo iterativo, por uma sua aproximação simetrizada. Uma possibilidade consiste em não se considerar, em cada iteração, a influência, na matriz jacobiana de $\mathbf{R}$, da variação, com a temperatura, quer do vector de fluxos equivalente quer da matriz global de rigidez térmica. Neste contexto, a aproximação simetrizada da matriz jacobiana de $\mathbf{R}$ resulta, de acordo com a equação 12.162, em

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{T}} \right|_{t+\Delta t}^i = -\mathbf{K}_G|_{t+\Delta t}^i. \quad (12.163)$$

De acordo com as equações 12.153, 12.161 e 12.163 obtém-se a seguinte equação de correcção iterativa das temperaturas nodais em regime transitório não-linear:

$$\mathbf{K}_G|_{t+\Delta t}^i \delta \mathbf{T}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{F}_{t+\Delta t}^i - \mathbf{K}_G|_{t+\Delta t}^i \mathbf{T}_{t+\Delta t}^i, \quad (12.164)$$

que corresponde a uma linearização aproximada do princípio das temperaturas virtuais em torno do último estado de temperaturas referente ao ciclo iterativo. Deste modo, verifica-se que a matriz tangente associada ao processo iterativo corresponde à matriz global de rigidez térmica $\mathbf{K}_G$.

No processo iterativo definem-se

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{F}_t + \Delta \mathbf{F}_{t+\Delta t} \\ \mathbf{T}_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{T}_t \\ \mathbf{K}_G|_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{K}_G|_t \\ \mathbf{R}_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{F}_{t+\Delta t}^0 - \mathbf{K}_G|_{t+\Delta t}^0 \mathbf{T}_{t+\Delta t}^0 \end{cases}, \quad (12.165)$$

como valores iniciais do vector de fluxos equivalentes, do vector das temperaturas nodais, da matriz tangente de rigidez térmica e do resíduo (vectorial), respectivamente. Posteriormente procede-se à determinação da variação das temperaturas nodais, recorrendo à equação 12.164, actualizando-se então o valor das temperaturas nodais, de acordo com a relação 12.159. Em seguida, com base no valor actualizado das temperaturas nodais calculam-se quer a matriz tangente

associada ao processo iterativo, com base na relação 12.149, quer o resíduo, de acordo com a relação 12.153. Este procedimento deverá ser repetido até que se atinja a convergência (por exemplo, $\|\delta \mathbf{T}_{t+\Delta t}^{i+1}\|$ menor que um valor predefinido). Na Figura 12.30 representa-se um esquema unidimensional do processo iterativo do método de Newton-Raphson para um problema térmico em que a solução num determinado incremento é atingida em três iterações. Por uma questão de simplificação e sem perda de generalidade, assume-se na representação da Figura 12.30 que $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$ é constante.

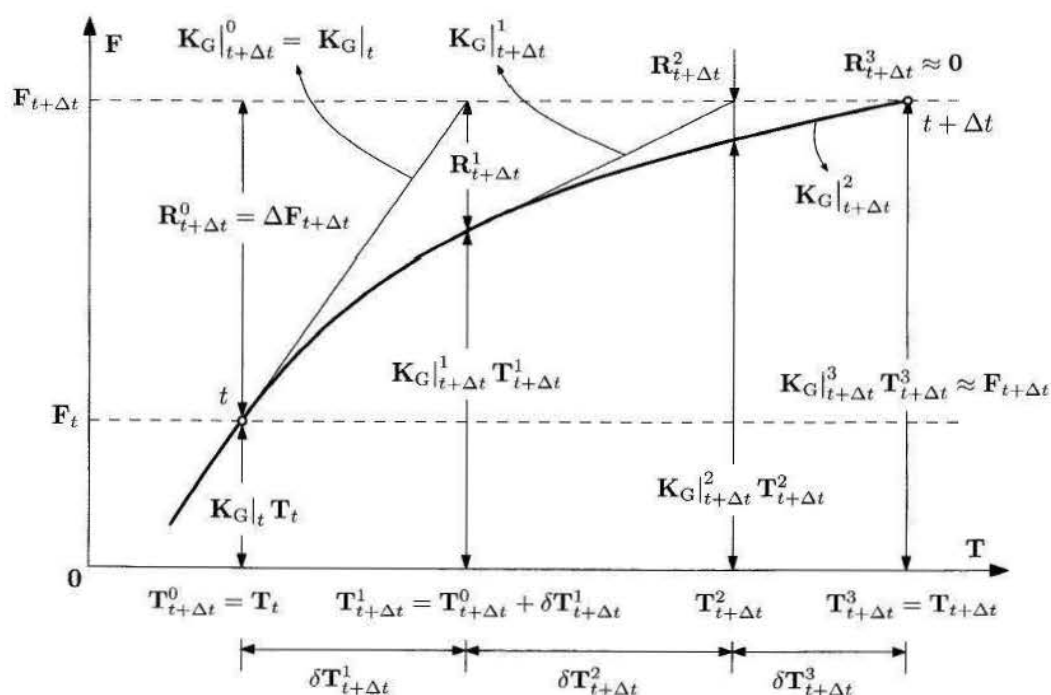


Figura 12.30 Representação esquemática do processo iterativo do método de Newton-Raphson, na resolução implícita de problemas térmicos em regime transitório não-linear ($\mathbf{F}_{t+\Delta t}$ constante).

O algoritmo de Newton-Raphson para problemas térmicos em regime transitório não-linear encontra-se ilustrado na Tabela 12.4.

Por fim, refira-se que o regime estacionário corresponde a uma hipótese aceitável sempre que as condições de fronteira sofram evoluções quase-estáticas e os efeitos de inércia térmica sejam insignificantes. Numericamente, esta condição corresponde a considerar uma matriz de capacidade térmica $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{0}$ ou um incremento de tempo $\Delta t \rightarrow +\infty$. Neste caso não faz sentido falar em integração

Tabela 12.4 Algoritmo de Newton-Raphson para resolução implícita de problemas térmicos em regime transitório não-linear.

1. Iniciação de variáveis:

$$1.1 \quad \mathbf{F}_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{F}_t + \Delta \mathbf{F}_{t+\Delta t}$$

$$1.2 \quad \mathbf{T}_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{T}_t$$

$$1.3 \quad \mathbf{K}_G|_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{K}_G|_t$$

$$1.4 \quad \mathbf{R}_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{F}_{t+\Delta t}^0 - \mathbf{K}_G|_{t+\Delta t}^0 \mathbf{T}_{t+\Delta t}^0$$

2. REPETIR — Ciclo iterativo em $i = 0, \dots$

$$2.1 \quad \text{Cálculo de } \delta \mathbf{T}_{t+\Delta t}^{i+1} \text{ por } \mathbf{K}_G|_{t+\Delta t}^i \delta \mathbf{T}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{R}_{t+\Delta t}^i$$

$$2.2 \quad \text{Actualização da temperatura: } \mathbf{T}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{T}_{t+\Delta t}^i + \delta \mathbf{T}_{t+\Delta t}^{i+1}$$

$$2.3 \quad \text{Cálculo de } \mathbf{K}_G|_{t+\Delta t}^{i+1} \text{ e } \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{i+1} \text{ para } \mathbf{T} = \mathbf{T}_{t+\Delta t}^{i+1}$$

$$2.4 \quad \text{Cálculo do resíduo } \mathbf{R}_{t+\Delta t}^{i+1} = \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{i+1} - \mathbf{K}_G|_{t+\Delta t}^{i+1} \mathbf{T}_{t+\Delta t}^{i+1}$$

ATÉ convergência OU paragem

temporal, uma vez que se assume uma invariância temporal das variáveis envolvidas no problema térmico. Deste modo, a solução $\mathbf{T}$ do problema térmico linear em regime estacionário obtém-se, de acordo com a equação 12.151, directamente a partir de

$$(\mathbf{K}_k + \mathbf{K}_c) \mathbf{T} = \mathbf{Q} + \mathbf{f}_N + \mathbf{f}_{PN} + \mathbf{f}_{R1}. \quad (12.166)$$

Não obstante, no caso de existirem não-linearidades associadas às propriedades materiais é necessário utilizar um processo incremental em que se discretiza o nível de carga térmica (pseudotempo t'). Deste modo, a equação 12.148 resulta em

$$\mathbf{K} \mathbf{T}_{t'+\Delta t'} - (\mathbf{Q}_{t'+\Delta t'} + \mathbf{f}_{t'+\Delta t'}) = \mathbf{0}. \quad (12.167)$$

Assim, tal como no caso não-linear transitório, em vez de se resolver o problema não-linear original de uma só vez, procede-se à resolução de subproblemas em

que a solução é inicialmente aproximada de modo linear e posteriormente corrigida, se for necessário, recorrendo a um método iterativo.

Procedendo a uma análise idêntica à que foi efectuada para o regime transitório, obtém-se a seguinte equação de correcção iterativa das temperaturas nodais em regime estacionário não-linear:

$$\mathbf{K}|_{t'+\Delta t'}^i \delta \mathbf{T}_{t'+\Delta t'}^{i+1} = \mathbf{Q}_{t'+\Delta t'}^i + \mathbf{f}_{t'+\Delta t'}^i - \mathbf{K}|_{t'+\Delta t'}^i \mathbf{T}_{t'+\Delta t'}^i. \quad (12.168)$$

Deste modo, o algoritmo geral de Newton-Raphson para problemas térmicos em regime estacionário não-linear obtém-se do algoritmo para o regime transitório (ver Tabela 12.4), a partir da substituição directa de $\mathbf{K}_G$, $\mathbf{F}$ e t por $\mathbf{K}$, $\mathbf{Q} + \mathbf{f}$ e t' , respectivamente.

12.7.2.6 Critérios de convergência e de paragem

A utilização eficiente do método iterativo de Newton-Raphson exige que se recorra a critérios de convergência e, eventualmente, de paragem. Assim, consideram-se dois tipos distintos de critérios de convergência:

- Critérios baseados na magnitude das correcções da variável que controla o processo como, por exemplo, a temperatura no processo térmico;
- Critérios baseados na magnitude do resíduo.

Neste contexto, consideram-se os seguintes critérios baseados na magnitude das correcções da variável que controla o processo:

$$\begin{cases} \|\delta \mathbf{T}_{t+\Delta t}^{i+2}\| \leq \varepsilon_{\text{tol}} \|\delta \mathbf{T}_{t+\Delta t}^1\| \\ \max(|\delta T_{t+\Delta t}^{i+2}|_k) \leq \varepsilon_{\text{tol}} \|\delta \mathbf{T}_{t+\Delta t}^1\| \end{cases}, \quad (12.169)$$

sendo ainda possível, em conformidade com a Secção 12.7.1.5, utilizar um segundo critério baseado na magnitude do resíduo (ver equação 12.73) e considerar dois tipos distintos de critério de paragem, associados ao número máximo de iterações admissível (ver equação 12.74) ou à existência quer de oscilações numéricas quer de divergência da solução (ver equação 12.75).

Referências Bibliográficas

1. Bathe, K.-J. *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Nova Jérsea, Estados Unidos da América, 1996.

2. Belytschko, T., Liu, W.K., Moran, B. *Non-Linear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons, West Sussex, Reino Unido, 2000.
3. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4.^a edição, John Wiley & Sons, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2002.
4. Crisfield, M.A. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures — Advanced Topics*, Vol. 2, John Wiley & Sons, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1997.
5. de Sousa Neto, E.A., Perić, D., Owen, D.R.J. *Computational Methods for Plasticity — Theory and Applications*, John Wiley & Sons, West Sussex, Reino Unido, 2008.
6. Doghri, I. *Mechanics of Deformable Solids — Linear, Nonlinear, Analytical and Computational Aspects*, Springer-Verlag, Berlim, Alemanha, 2000.
7. Drucker, D.C., Prager, W. Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design, *Quarterly of Applied Mathematics* **10**(2):157–165, 1952.
8. Hinton, E., Wood, R.D., Bicanic, N., White, P.S., Hellen, T. *NAFEMS — Introduction to Nonlinear Finite Analysis*, E. Hinton (editor), NAFEMS, East Kilbride, Reino Unido, 1992.
9. Hogge, M.A. A Comparison of Two- and Three-Level Integration Schemes for Non-Linear Heat Conduction, Numerical Methods in Heat Transfer, R.W. Lewis, K. Morgan e O.C. Zienkiewicz (editores), John Wiley & Sons, pp. 75–90, Chichester, Reino Unido, 1981.
10. Hughes, T.J.R., Taylor, R.L. Unconditionally Stable Algorithms for Quasi-Static Elasto/Visco-Plastic Finite Element Analysis, *Computers & Structures* **8**(2):169–173, 1978.
11. Incropera, F.P., DeWitt, D.P. *Introduction to Heat Transfer*, 2.^a edição, John Wiley & Sons, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1990.
12. Khan, A.S., Huang, S. *Continuum Theory of Plasticity*, 4.^a edição, John Wiley & Sons, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1995.
13. Kojić, M., Bathe, K.J. *Inelastic Analysis of Solids and Structures*, Springer-Verlag, Berlim, Alemanha, 2005.
14. Krieg, R.D., Krieg, D.B. Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic-Perfectly Plastic Model, *Journal of Pressure Vessel Technology* **99**(4):510–515, 1977.
15. Lewis, R.W., Morgan, K., Thomas, H.R., Seetharamu, K.N. *The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis*, John Wiley & Sons, Chichester, Reino Unido, 1996.
16. Lubliner, J. *Plasticity Theory*, Dover Publications, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 2008.
17. MSC, Software Corporation. *When $f \neq Ku$ — An Introductory Guide to Nonlinear Analysis*, Santa Ana, Califórnia, Estados Unidos da América, 2005.
18. Nagtegaal, J.C. On the Implementation of Inelastic Constitutive Equations with Special Reference to Large Deformation Problems, *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering* **33**(1–3):469–484, 1982.
19. Ortiz, M., Popov, E.P. Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **21**(9):1561–1576, 1985.
20. Simo, J.C., Hughes, T.J.R. *Computational Inelasticity*, Interdisciplinary Applied Mathematics — Mechanics and Materials, Vol. 7, Springer-Verlag, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1998.
21. Simo, J.C., Taylor, R.L. Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **48**(1):101–118, 1985.
22. Stoughton, T.B. A Non-Associated Flow Rule for Sheet Metal Forming, *International Journal of Plasticity* **18**(5–6):687–714, 2002.

23. Wilkins, M.L. *Calculation of Elastic-Plastic Flow*, Methods of Computational Physics, Vol. 3, B. Alder, S. Fernback e M. Rotenberg (editores), Academic Press, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1964.
24. Zienkiewicz, O.C. *Finite Element Methods in Thermal Problems*, Numerical Methods in Heat Transfer, R.W. Lewis, K. Morgan e O.C. Zienkiewicz (editores), John Wiley & Sons, pp. 1–25, Chichester, Reino Unido, 1981.
25. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method — The Basis*, Vol. 1, 5.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2000.
26. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. *The Finite Element Method — Solid Mechanics*, Vol. 2, 5.^a edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 2000.

Índice Remissivo

A

Abordagem
 euleriana, 21
 lagrangiana, 21
Agrupamento, 3, 63
Algoritmo
 de integração, 406
 de retorno radial, 422
 explícito, 406
 frontal, 6
 implícito, 407
Altura piezométrica, 96
Amostragem, 238
Análise, 32
 axissimétrica, 249
 bidimensional, 58, 249
 dinâmica, 430
 estrutural, 125, 360
 linear, 375
 matricial, 79
 modal, 405
 térmica, 357
Apoio, 68
Aproximação, 128
Assemblagem, 3, 63, 86, 93, 104, 135, 182
Atrito, 402
Axissimétrico
 elemento finito, 249

B

Balística, 17
Balanço energético, 136
Barra, 78, 118

Bauschinger
 efeito de, 392
Bidimensional, 135, 142

C

Cálculo
 diferencial, 120
 integral, 120
Calor, 132
Campo
 de deformações, 166, 209, 281, 317, 334
 de deslocamentos, 166, 179, 267, 316
 de temperaturas, 435
 de tensões, 182, 253, 282
Carga
 distribuída, 82, 85
 nodal, 255
 volúmica, 255
Carregamento, 31
 exterior, 68
 nodal, 102
Casca, 266, 305, 326
Cauchy
 tensor das tensões de, 53, 144
Caudal, 96
 nodal, 97
Cedência, 378
Cinemática, 194, 316
Circuito eléctrico, 78, 94
Coeficiente
 de Poisson, 145, 193, 254, 284, 338
Comportamento
 dinâmico, 374

- elastoplástico, 17
- estático, 374
- linear elástico, 61, 80, 122, 195, 375
- quase-estático, 374
- Compressão, 126
- Condensação estática, 5
- Condição
 - de carga-descarga, 390, 393, 397
 - de consistência, 390, 392, 397
- Condições de fronteira, 31, 84, 86, 93, 116, 132, 375
 - complementares, 126
 - de Dirichlet, 409
 - de Neumann, 409
 - essenciais, 125, 409
 - genéricas, 69
 - mutuamente exclusivas, 126
 - naturais, 125, 409
- Condução de calor, 142, 408
- Condutividade térmica, 131, 134
- Conectividade, 65, 84, 92
- Contacto, 402
- Continuidade, 123
 - dos deslocamentos, 204
- Contração
 - de índices, 51
 - dupla, 52
- Convenção de Einstein, 47, 204
- Convergência, 417, 419
 - critério de, 446
- Coordenadas
 - cartesianas, 37, 192, 278
 - curvilíneas, 309
 - de área, 193, 211, 217
 - de volume, 277
 - globais, 307, 316
 - internas, 213
 - locais, 310, 313
 - naturais, 192, 223, 316
 - nodais, 270
 - normalizadas, 223, 267
 - sistema de, 307
 - transformação de, 268
- Corpo
 - de revolução, 249
 - deformável, 119
- Coulomb
 - lei de, 402
- Critério
 - de cedência, 390, 394
 - de Tresca, 391
 - de von Mises, 390
 - de convergência, 417
 - de paragem, 417
- D**
- Dano, 17
- Deformação, 53, 182
 - angular, 194
 - axial, 80
 - circunferencial, 249
 - constante, 210
 - estado tridimensional de, 195
 - gradiente de, 199
 - infinitesimal, 194, 318
 - linear elástica, 193, 282
 - natural assumida, 325
 - plástica, 282
 - plana, 194
 - virtual, 159
- Deformações
 - campo de, 119
 - de Green-Lagrange, 329
 - grandes, 386
 - pequenas, 102
 - principais, 283
- Degeneração, 306
- Delta de Kronecker, 394
- Derivação, 352
 - em cadeia, 268
- Derivada, 352
 - das funções de forma, 268
 - de primeira ordem, 123
 - não-nula, 123
 - ordem da, 122
 - parcial, 48, 120
- Deslocamento, 30, 101
 - axial, 89, 249
 - nodal, 30, 61, 81, 89, 101, 202, 204
 - prescrito, 58, 69, 119, 125, 412
 - radial, 249
 - virtual, 159
- Deslocamentos
 - campo de, 118
 - continuidade dos, 204
 - grandes, 386

- infinitesimais, 375
- Dextrogiro, 45
- Diferença finita
 - à frente, 347, 355
 - atrás, 347, 355
 - central, 355
- Diferenças finitas
 - a duas dimensões, 354
 - método das, 345
- Dinâmica, 16
 - estrutural, 374
- Dirichlet
 - condições de fronteira de, 409
- Discretização, 3, 28, 58, 128, 140, 170, 181
 - espacial, 404, 412
 - temporal, 404, 436
- Distorção, 194
- Divergência, 137
- Domínio, 116, 412
 - contínuo, 116
 - elástico, 378
 - unidimensional, 128
- E**
- Efeito de Bauschinger, 392
- Einstein
 - convenção de, 47, 204
- Elasticidade
 - linear, 61, 144, 382
 - matriz de, 197
 - não-linear, 385
- Elastoplasticidade, 17, 149, 385, 393
 - infinitesimal, 408
- Elemento finito, 27, 58, 77, 128
 - área do, 202, 211
 - axissimétrico, 193, 249
 - isoparamétrico, 256
 - bidimensional, 224
 - bilinear, 220
 - cúbico, 212, 274
 - de baixa ordem, 266
 - de nove nós, 226
 - de ordem superior, 183, 212, 270
 - de primeira ordem, 219, 251
 - de quatro nós, 225
 - de segunda ordem, 270
 - degenerado, 306, 313
 - do tipo casca, 313
 - do tipo placa, 313
 - distorção do, 222
 - do tipo barra, 79, 82, 88, 164
 - do tipo casca, 266
 - linear, 331
 - quadrático, 332
 - do tipo placa, 266
 - fronteira do, 204
 - hexaédrico, 265, 272
 - isoparamétrico, 223, 309
 - lagrangiano, 224, 272
 - linear, 179
 - quártico, 274
 - quadrático, 212, 219
 - quadrilátero, 192, 224
 - axissimétrico, 251
 - rectangular, 219
 - serendipítico, 274
 - tetraédrico, 265, 277, 293
 - triangular, 192, 199, 213
 - axissimétrico, 251
 - cúbico, 217
 - de dez nós, 217
 - de três nós, 216
 - quadrático, 217
 - tridimensional, 263
 - unidimensional, 158
 - viga-barra, 100
- Embutidura, 19
- Encruamento, 395
 - cinemático, 392
 - isotrópico, 392
 - misto, 392
- Energia
 - de deformação, 159
 - potencial, 6, 161
 - variação da, 161
- Engenharia, 58
 - Civil, 78
 - Mecânica, 78
- Equação
 - constitutiva, 195
 - da linha elástica, 102
 - de Fourier, 136
 - de Lagrange, 360
 - dos trabalhos virtuais, 123
- Equações
 - de equilíbrio, 103

diferenciais, 116, 119, 357
 ordinárias, 405
 sistema global de, 67
 Equilíbrio, 79
 condições de, 93
 equações de, 61, 103
 estático, 64, 81, 119, 162

Erro
 de aproximação, 407
 de truncatura, 352

Escalar, 48

Esforço
 axial, 79, 101
 exterior, 68, 83
 externo, 161
 interno, 161
 nodal, 80, 81
 normal, 78
 transverso, 78, 100

Espaço euclidiano, 37

Espessura, 305, 309, 326
 nodal, 317

Estado plano
 de deformação, 194, 195
 de tensão, 4, 194, 195

Estampagem, 17

Estrutura, 64
 articulada, 79
 plana, 87
 bidimensional, 87
 reticulada, 78
 plana, 100

Expansão de Taylor, 346

Extensão, 194

Extrusão, 17

F

Flexibilidade
 matriz de, 5

Fluência, 400

Fluxo
 de calor, 131, 136
 térmico, 135

Forças
 distribuídas, 246
 nodais, 59, 66, 89
 equivalentes, 246, 249
 prescritas, 58

Forma variacional, 6

Formulação
 clássica, 116
 diferencial, 430
 forte, 116, 120, 132, 136
 fraca, 117, 123, 129, 132, 138
 integral fraca, 410, 432
 isoparamétrica, 184, 223, 267

Fourier
 equação de, 136

Fratura, 17

Fronteira, 116, 118, 136
 condições de, 68

Função
 arbitrária, 121
 candidata, 121
 de interpolação, 163, 203, 270
 de peso, 121, 129
 de teste, 121
 polinomial, 163

Funções
 de aproximação, 117
 de forma, 117, 128, 163, 166, 203, 208, 268, 274
 de elementos finitos axissimétricos, 252
 derivadas das, 129, 146, 209
 matriz de, 179

G

Galerkin
 método de, 129, 134

Gauss
 pontos de, 243, 321
 Gauss-Legendre, 57, 186
 integração de, 246, 257
 quadratura de, 238, 292

Geometria, 316

Global
 sistema de equações, 182

Gradiente, 137
 progressivo, 439

Grandes
 deformações, 20, 386
 deslocamentos, 20, 386
 rotações, 387

Grandeza
 escalar, 38
 tensorial, 38

vectorial, 38
 Grau de liberdade, 30, 61, 64, 87, 93, 94,
 100, 116, 201, 249, 280, 307
 numeração de, 65
 Green
 teorema de, 137
 Green-Lagrange
 deformações de, 329

H

Hexaedro, 28
 Hidroformagem, 17
 Hooke
 lei de, 53, 55, 80, 122, 144, 161, 193, 210,
 282, 376

I

Impacto, 17
 Inércia
 momento de, 103
 Incremento, 403, 441
 Integração
 analítica, 234
 completa, 244
 de Gauss-Legendre, 246, 257
 implícita, 413, 420, 440
 numérica, 186, 239, 246, 292
 ordem de, 243, 293
 pesos de, 186, 238, 292
 ponto de, 186
 por partes, 120, 138
 pseudotemporal, 420
 reduzida, 244
 temporal, 436
 Integral
 analítico, 292
 Intensidade de corrente, 94
 Interpolação, 163, 183, 211, 278
 funções de, 266, 270
 isoparamétrica, 223
 mista, 330
 Isolinhas, 32
 Isoparamétrica
 abordagem, 6
 Isotropia, 145, 195, 283
 Isovalores, 32
 Iterações, 403, 419

K

Kelvin
 modelo de, 400
 Kronecker
 delta de, 44, 394
 Kuhn-Tucker
 condição de carga-descarga de, 397

L

Lagrange
 equação de, 360
 polinómio de, 183, 211, 214
 Largura de banda, 174
 Lei
 constitutiva, 195, 337
 de comportamento, 420
 de Coulomb, 402
 de encruamento, 390, 395
 de Hooke, 53, 55, 80, 122, 144, 161, 193,
 210, 282, 376
 de Moore, 25
 de Ohm, 94
 de plasticidade, 390, 392, 396
 Linha elástica, 102

M

Método
 das diferenças finitas, 117, 345
 das forças, 79
 de Galerkin, 129, 134, 141
 do gradiente progressivo, 439
 dos deslocamentos, 79
 dos elementos finitos, 3, 57, 116
 dos resíduos pesados, 129
 iterativo de Newton-Raphson, 441
 semi-implícito, 439
 Módulo
 de corte, 194
 de elasticidade, 80, 119, 162, 193, 254, 284
 transversal, 194
 de Young, 119, 193, 254, 284
 elastoplástico
 consistente, 426
 tangente, 398
 Magnitude, 41
 Malha
 de elementos finitos, 65

- geração de, 199
 - não-estruturada, 199
 - refinamento de, 199, 280
 - Material
 - linear elástico, 382
 - Matriz
 - B, 146
 - constitutiva, 55, 145, 254, 283
 - de condutividade térmica, 141
 - de decomposição, 89
 - de derivadas de funções de forma, 209, 253, 279
 - de elasticidade, 55, 145, 197, 376
 - de flexibilidade, 5
 - de funções de forma, 179
 - de rigidez, 5, 120, 169, 254
 - elementar, 63, 93, 96, 130, 148, 181, 245
 - global, 63, 106, 131, 285
 - simetria da, 123, 128
 - singular, 70
 - de rotação, 105, 106
 - de transformação, 321
 - inversa, 72
 - jacobiana, 235, 269, 320
 - inversa, 236
 - singular, 68, 72
 - transposta, 50
 - Maxwell
 - modelo de, 400
 - Mecânica estrutural, 118
 - Meios contínuos, 115, 373
 - Memória, 407
 - Modelação, 403
 - Modelo
 - constitutivo, 17
 - de comportamento, 195
 - de Kelvin, 400
 - de Maxwell, 400
 - Modos incompatíveis, 5
 - Momento
 - de inércia, 103
 - flector, 78, 100
 - Moore
 - lei de, 25
 - Movimento
 - de corpo rígido, 61, 68, 205
 - de translação, 61
 - Multiplicador plástico, 396
- N**
- Nó, 28, 62, 77, 80, 128, 213, 266, 270, 367
 - Não-linear, 376
 - Não-linearidade
 - das condições de fronteira, 377, 382, 402
 - geométrica, 377, 379, 401
 - material, 377
 - dinâmica, 400
 - tipos de, 376
 - Neumann
 - condições de fronteira de, 409
 - Newton-Raphson
 - método iterativo de, 401, 441
 - Norma, 41
 - Normal, 136
 - Notação, 37
 - absoluta, 40
 - de Voigt, 53, 144
 - indicial, 40, 47
 - simbólica, 40
 - Numeração
 - dos elementos finitos, 65
 - dos nós, 200
 - global, 64, 200
 - local, 200
- O**
- Ohm
 - lei de, 94
 - Operador
 - gradiente, 137
 - Ordem
 - de integração, 243, 293
 - Orientação, 87
- P**
- Pórtico, 78
 - Pós-processamento, 32
 - Paragem
 - critério de, 417, 446
 - Paralelogramo, 42
 - Pascal
 - tetraedro de, 272
 - triângulo de, 219
 - Pentaedro, 28
 - Pequenas transformações, 102
 - Peso

- de integração, 186, 238, 292
 - próprio, 85
 - Placa, 196, 266, 305, 326
 - Plasticidade, 396
 - Poisson
 - coeficiente de, 145, 193, 254, 284, 338
 - efeito de, 196
 - Polinómio, 271
 - de Lagrange, 183, 211, 214
 - Ponto
 - de amostragem, 238
 - de Gauss, 321
 - de integração, 186, 238
 - Potencial eléctrico, 94
 - Pré-processamento, 31
 - Prager
 - condição de consistência de, 397
 - Pressão
 - diferença de, 96
 - Princípio
 - da energia potencial mínima, 161
 - das temperaturas virtuais, 432
 - dos deslocamentos virtuais, 150
 - dos trabalhos virtuais, 123, 144, 147, 158, 180
 - Processo
 - incremental, 441
 - iterativo, 419
 - Produto
 - escalar, 44
 - interno, 43, 51
 - tensorial, 49
 - vectorial, 45
 - Programa, 26
 - Programador, 26, 33
 - Propagação de onda, 374
- Q**
- Quadratura
 - de Gauss-Legendre, 186, 238, 292
 - Quadrilátero, 28
- R**
- Reacção
 - no apoio, 85, 87
 - Reacções
 - nos apoios, 94
 - Rede hidráulica, 78, 94
 - Referencial, 45, 307, 430
 - cartesiano, 37
 - co-variante, 327
 - global, 267
 - isoparamétrico, 184, 271
 - local, 104, 267
 - natural, 238, 245
 - normalizado, 184
 - Refinamento de malha, 280
 - Regra
 - de derivação em cadeia, 268
 - do paralelogramo, 42
 - Relação
 - entre deformação e deslocamentos, 386
 - entre tensão e deformação, 385
 - Resíduo, 131, 417
 - Resíduos pesados, 129
 - Resistência eléctrica, 94
 - Resolução
 - do sistema de equações, 182
 - incremental, 403
 - iterativa, 403
 - Restrição, 31
 - Retenção numérica, 244
 - Retorno radial, 422
 - Rigidez, 95, 326
 - à torção, 379
 - axial, 90
 - matriz de, 5
 - Rotação, 79, 101, 107
 - matriz de, 105
 - sem deformação, 207
 - Rotações
 - grandes, 387
 - Runge-Kutta, 57
- S**
- Secção transversal, 81
 - Semidiscretização, 404, 434
 - Sinistrogiro, 45
 - Sistema
 - contínuo, 158
 - de coordenadas, 307
 - curvilíneo, 309
 - local, 310, 313
 - de eixos
 - global, 87, 104

- local, 87
- de equações, 62
 - algébricas, 116
 - elementar, 104
 - global, 67, 69, 71, 84, 86, 94, 104, 182
 - impossível, 68
 - indeterminado, 68
 - lineares, 70
 - método de resolução, 70
 - reduzido, 69, 70, 85, 86, 94, 182
- discreto, 77, 94, 157
 - analogias, 97
- Sobreposição dos efeitos, 376
- Solução, 407
 - aproximada, 118
- Subdomínio, 116
- Superfície
 - de referência, 306
- T**
- Taylor
 - expansão de, 346
 - série de, 346
- Temperatura, 131
 - prescrita, 357
- Tensão, 80, 182
 - circunferencial, 249
 - de cedência, 378, 390
 - estado de, 193
 - estado tridimensional de, 195
 - gradiente de, 199
 - plana, 194
- Tensões
 - campo de, 119
 - prescritas, 125
 - principais, 283
- Tensor, 39
 - anti-simétrico, 51
 - cartesiano, 39
 - das deformações, 193, 318
 - plásticas, 422
 - das tensões, 193, 210
 - de Cauchy, 53, 144
 - de deformações, 209
 - de elasticidade, 144, 283
 - de identidade, 51
 - de ordem zero, 40, 48
 - de primeira ordem, 40, 48
 - de quarta ordem, 40
 - de segunda ordem, 39, 49
 - de terceira ordem, 39
 - desviador, 396
 - ortogonal, 51
 - simétrico, 51
 - traço de um, 51, 52
- Teorema
 - da divergência, 138
 - de Green, 137
- Tetraedro, 28
 - de Pascal, 272
 - de primeira ordem, 280
 - de segunda ordem, 280
- Topologia, 307
- Torção, 379
- Traço, 51
- Trabalhos virtuais
 - princípio dos, 147
- Tracção, 126
- Transformação de coordenadas, 268
- Translação
 - sem deformação, 205
- Transmissão de calor, 135
- Transposta, 50
- Treliça, 78
- Tresca
 - critério de cedência de, 391
- Triângulo, 28
 - de Pascal, 219
- Tridimensional, 135, 142
- Tubagem, 96
- U**
- Unidimensional, 118, 122
- Utilizador, 27
- V**
- Valores próprios, 243
- Variacional, 6
- Vector, 40
 - componentes de um, 38
 - de cargas exteriores, 131
 - de deslocamentos, 173
 - de esforços nodais, 83, 173
 - de forças
 - distribuídas, 248

- externas, 130
 - nodais, 148, 181, 249, 286
 - deslocamentos nodais, 81
 - esforços nodais, 81
 - magnitude de um, 41
 - multiplicação de escalar por, 42
 - norma de um, 41, 44
 - normal, 136
 - nulo, 43
 - simétrico, 43
 - Vectores
 - adição de, 42
 - produto
 - escalar de, 43, 44
 - externo de, 45
 - tensorial de, 49
 - subtração de, 43
 - Versor, 137
 - Viga, 78
 - Viga-barra, 100, 380
 - Voigt
 - notação de, 53, 144
 - von Mises
 - critério de cedência de, 390
- Y**
- Young
 - módulo de, 193

DA MESMA EDITORA



AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL 3ª Edição Atualizada e Aumentada

J. Norberto Pires

496 páginas • P.V.P. (Janeiro 2010): 31,50 euros • 978-972-8480-17-2

Nesta 3ª edição procurou-se actualizar algumas secções, no sentido de reflectir os desenvolvimentos constantes que se verificam nos vários assuntos que constituem a Automação Industrial. Foram adicionados mais exemplos e introduzidas secções na área da robótica, nomeadamente em termos de aplicações de monitorização e comando de células industriais. Ao longo do livro procurou-se demonstrar e documentar com exemplos que os modernos sistemas de automação industrial são sistemas computadorizados que utilizam robótica e *software* distribuído, e vários sistemas de interface com os operadores humanos. O objectivo é sempre realizar com máquinas inteligentes e altamente produtivas as tarefas repetitivas e monótonas, às quais as máquinas estão adaptadas, permitindo libertar a actividade humana para tarefas mais condizentes com a sua condição.

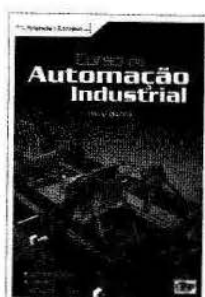
MECÂNICA DOS FLUIDOS 2ª Edição

632 páginas • P.V.P. (Janeiro 2010): 34,95 euros • 978-972-8480-19-4

Luis Adriano Oliveira
António Gameiro Lopes



Mecânica dos Fluidos é um texto de nível introdutório sobre o comportamento dos fluidos (líquidos e gases) em repouso ou em movimento. Expõe de forma clara e desenvolvida o essencial dos conceitos básicos necessários à iniciação em áreas específicas como aerodinâmica subsónica ou supersónica (escoamentos internos ou externos), hidrodinâmica (escoamentos em condutas ou de superfície livre) ou turbomáquinas. Inclui um vasto conjunto de exercícios ilustrativos intercalados na exposição teórica, e de exercícios propostos que são integralmente resolvidos no final do texto. Em total articulação com a versão impressa, é paralelamente disponibilizada uma extensa componente Internet de forte pendor interactivo contendo, por um lado, *software* de cálculo em linguagem *Fortran* com acesso inteiramente aberto e, por outro, aplicações informáticas com interface gráfica amigável, cuja utilização não pressupõe conhecimentos em linguagem de programação e que permitem simular sugestivos exemplos de interesse prático.

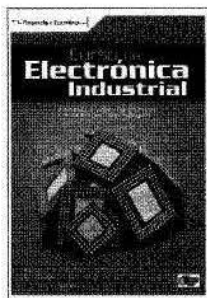


CURSO DE AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

Paulo Oliveira

312 páginas • P.V.P. (Janeiro 2010): 19,95 euros • 978-972-8480-21-9

O *Curso de Automação Industrial* foi concebido no âmbito do projecto "Recursos Didácticos de Automação e Electrónica Industrial" como resposta às muitas solicitações do tecido empresarial. Desenvolvido no seio da AFTEBI – Associação para a Formação Tecnológica e Profissional da Beira Interior – que promove e coopera em acções de desenvolvimento regional e sectorial, designadamente na formação especializada de curta e de média duração, este livro é direccionado para estudantes e professores, assim como para profissionais e empresas, facilitando, aos primeiros, a sistematização das ideias a transmitir, simplificando a comunicação entre ambos, e oferecendo, aos últimos, a garantia da uniformização das acções de formação e resposta às necessidades colectivas ou individuais. Principalmente destinado à Formação Profissional e servindo como complemento ao Ensino Superior, sob uma óptica de resolução de problemas, esta obra permitirá também que os estudantes procurem, de forma autónoma e crítica, o saber e os conhecimentos relativos a esta área específica das indústrias, consolidando e sedimentando assim as competências necessárias para a sua correcta aplicação.



Fernando Velez / Paulo Oliveira
Luís Borges / Ana Rodrigues



Este livro foi concebido no âmbito do projecto "Recursos Didácticos de Automação e Electrónica Industrial" como resposta às muitas solicitações do tecido empresarial. Desenvolvido no seio da AFTEBI, este livro é direccionado para estudantes e professores, assim como para profissionais e empresas.

Principalmente destinado à Formação Profissional e servindo como complemento ao Ensino Superior, este livro foi elaborado com uma orientação pedagógica cuidada, constituída por uma série de figuras e ilustrações de processos, de modo a facilitar a compreensão da teoria; fundamentos conceptuais essenciais expostos de forma clara e objectiva e exemplos e problemas com a respectiva demonstração e resolução, desde a introdução ao laboratório até à experimentação. Esta obra permitirá também que os estudantes procurem, de forma autónoma e crítica, o saber e os conhecimentos relativos a esta área específica das indústrias, consolidando e sedimentando assim as competências necessárias para a sua correcta aplicação.



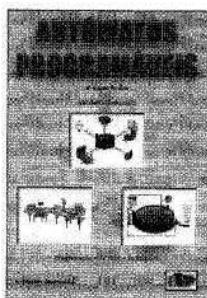
192 páginas • P.V.P. (Janeiro 2010): 14,95 euros • 978-972-8480-19-8

António Francisco

Tendo em conta os motores eléctricos clássicos, mas também os motores eléctricos da actualidade, pretende-se com esta obra, utilizando uma abordagem didáctica adequada e uma linguagem simples e objectiva, fornecer os conhecimentos fundamentais, teóricos e práticos, para que estudantes e técnicos compreendam o funcionamento e saibam ligar motores eléctricos.

Dada a grande diversidade de motores eléctricos seleccionamos aqueles que possibilitam uma compreensão global sobre o funcionamento destas máquinas e outros que, actualmente, têm grande aplicação e dos quais não existe bibliografia em língua portuguesa.

Esperamos que este livro contribua para uma melhor e mais fácil aprendizagem dos motores eléctricos, que seja uma ferramenta importante, quer para o professor/formador no desempenho da sua profissão, quer para o aluno/técnico na sua aprendizagem.



António Francisco

412 páginas • P.V.P. (Janeiro 2010): 28,85 euros • 978-972-8480-18-9

Esta obra fornece os conhecimentos necessários para a compreensão, programação e utilização de autómatos programáveis. Aborda os modelos mais recentes de autómatos dos principais fabricantes e exemplos de programação com as últimas versões dos respectivos softwares, sendo os assuntos tratados numa linguagem simples, estruturados de forma pedagógica e tendo em conta as necessárias informações de carácter técnico. O livro destina-se aos alunos dos cursos profissionais, técnicos de automatismo e, de uma maneira geral, a todos aqueles que se interessam por automação.

OUTRAS PUBLICAÇÕES



PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA PARA ENGENHARIA

Jorge André

584 páginas • P.V.P. Janeiro 2010: 34,35 euros • 978-972-757-477-3

Esta obra, dirigida a estudantes e profissionais de todas as áreas da Engenharia e, também útil para as Ciências Naturais, aborda os fundamentos das probabilidades e estatística. Começa por justificar o interesse do estudo destas teorias no curso e na vida profissional, apresentando depois, no âmbito das Probabilidades, a teoria elementar e as variáveis aleatórias, e no âmbito da Estatística, a estimação paramétrica, os testes paramétricos, o teste não-paramétrico do qui-quadrado e a regressão estatística. Expõe a teoria de forma motivante, colocando a tónica do rigor matemático onde este é mais relevante em Engenharia, em particular, na aplicação da teoria à resolução de problemas. Contém cerca de 150 exemplos (resolvidos) e 250 problemas (propostos, com soluções) de vários graus de dificuldade, abrangendo uma vasta gama de aplicações como, por exemplo, a Análise e controlo de erros, projecto de engenharia, electrotecnia e informática, gestão de tráfego, planeamento da produção, gestão de stocks, controlo da qualidade, fiabilidade e manutenção, análise de riscos, e tópicos variados das áreas de Física e Química, Meteorologia e Geofísica, Ciências da Vida, Ciências Humanas e Sociais.



CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Vítor Cancela Meireles

560 páginas • P.V.P. Janeiro 2010: 29,95 euros • 978-972-757-586-2

Esta obra destina-se a apoiar o ensino de circuitos eléctricos de corrente contínua e alternada sinusoidal, quer a estudantes de Engenharia Electrotécnica, quer a estudantes de outros ramos de Engenharia ou de outras ciências exactas. É pressuposto que o leitor típico deste livro tenha conhecimentos ao nível do 12º ano de escolaridade. Não são necessários quaisquer conhecimentos prévios de Física, nomeadamente sobre os campos Eléctrico e Magnético. Uma obra útil também para professores e estudantes do ensino secundário e profissional.

Em relação à 3ª Edição foram realizadas mais de uma centena de alterações no texto, nas figuras e no aspecto gráfico do livro. Foram também acrescentados cerca de três dezenas de novos Exercícios Propostos, que se consideraram de interesse por serem suficientemente diferentes dos já existentes. Em relação à 4ª Edição foram realizadas algumas alterações no texto, nos Exercícios Propostos e no aspecto gráfico do livro.



DESENHO TÉCNICO MODERNO

Arlindo Silva / Carlos Tavares Ribeiro
João Dias / Luís Sousa

724 páginas • P.V.P. Janeiro 2010: 35,35 euros • 978-972-757-337-6

O desenho técnico é uma base de conhecimento fundamental e indispensável na Engenharia, na Arquitectura e no Design Industrial. A sua constante actualização, quer pelo aparecimento de Normas Internacionais, quer pelo avanço de sistemas informáticos CAD, criou a necessidade da obra *Desenho Técnico Moderno* – apresentação detalhada dos conceitos que lhe estão associados, das regras e procedimentos da sua utilização em geral, e também das particularidades específicas nos diversos domínios de aplicação, conjugando a representação tradicional e as técnicas de modelação geométrica, cada vez mais baseadas em sistemas CAD 3D. Esta nova edição reflecte as necessidades nesta área constatadas pelos autores nos meios académico e profissional, servindo assim como uma contribuição ao desenvolvimento da mesma.



CreativeTech
Creative Technology

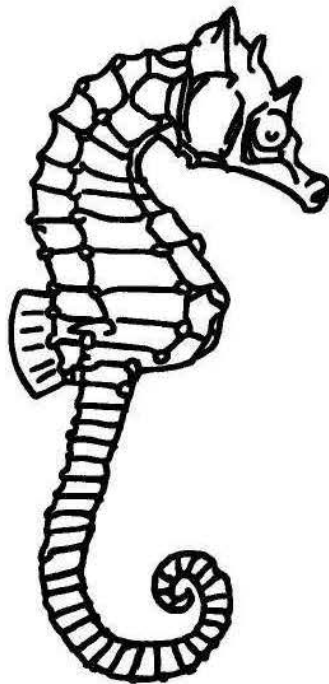
- Projectos e consultadoria de engenharia
- Desenvolvimento de *software*
- Media e *web authoring*

Travessa do Mercado 5, 1.º Dto. (Sala 2)
3800-224 Aveiro
Portugal

www.creativetech.pt
info@creativetech.pt

CreativeTech

Creative Technologies



www.creativetechnologies.pt

info@creativetechnologies.pt

"Never innovate to compete, innovate to change the rules of the game"

David O. Adeife

Método dos Elementos Finitos

Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia

F. Teixeira-Dias
J. Pinho da Cruz
R.A. Fontes Valente
R. J. de Alves de Sousa

Para este livro, os autores definiram como objectivo primordial a **introdução dos conceitos fundamentais associados ao estudo, à compreensão e à implementação do Método dos Elementos Finitos (MEF)**. Optou-se pela organização e pela orientação do texto para o perfil de leitor que esteja a ter o seu primeiro contacto com o método e que com este livro pretenda **ganhar competências na aplicação do MEF em problemas de engenharia**. No entanto, a apresentação dos temas é, tanto quanto possível, genérica e transversal a outras áreas de conhecimento. Entre outros, o livro aborda os seguintes temas: análise numérica de sistemas discretos e meios contínuos, elementos finitos uni-, bi- e tridimensionais, elementos finitos axissimétricos e dos tipos placa e casca degenerados, método das diferenças finitas (MDF) e análise não-linear.

Sendo vasto o público-alvo deste livro, são vários os percursos possíveis para a sua leitura, nomeadamente atendendo ao nível de conhecimento de um leitor principiante ou iniciado. No entanto, este livro pode ainda ser utilizado por um leitor avançado como fonte e referência de informação relacionada com os métodos aproximados em engenharia e, nomeadamente, com o MEF. O conteúdo desta obra pode enquadrar-se nos conteúdos programáticos de disciplinas de primeiro, segundo e terceiro ciclos, incluindo mestrados integrados, de cursos de diferentes áreas de engenharia de universidades e de institutos politécnicos.

Inclui Anexo a Cores.

